

CHAPTER 14



품질 관련 최적화 모형

- 14.1 개요
- 14.2 양쪽 규격하의 최적 공정평균 설정
- 14.3 용기 충전공정의 최적 공정평균 설정
- 14.4 용기 충전공정의 최적 공정평균 및 규격상한 설정
- 14.5 실량표시 상품의 공정평균 설정과 검사계획
- 14.6 추세 공정의 생산주기 설정*
- 14.7 공정 설정 제어: 조화 조정 규칙*
- 14.8 대응특성에 의한 검사방법
- 14.9 선택조립 방식*

어떤 냉동식품의 포장 단위당 표시 실량은 1,000g이고 검사로트의 크기는 500이다. 이런 실량표시 상품은 평균요건과 개별요건을 모두 통과해야 시장에 출하되어 정상가격으로 판매된다. 이 회사에서는 'KS A 50087: 정량표시상품의 정량검사 스킴'에 의해 평균요건으로는 50개를 랜덤 추출하여 구한 단위 중량의 평균이 $1,000 - 0.397s$ (s 는 표본의 표준편차 값)보다 커야 하며, 개별요건으로는 50개 중에서 985g 미만인 제품이 3개 이하, 970g 미만인 제품이 한 개도 없어야 로트를 합격시키는 검사방식을 적용하고 있다. 즉, 개별요건은 50개 검사제품 중에서 970g 미만이 하나도 없어야 하며, 970g 이상~985g 미만인 제품은 3개까지 허용하는 조건이다.

이 제품은 자동충전장치에 의해 내용물을 채운 후 내용물 용량을 측정하는데, 상기 샘플링검사를 통과하는 로트는 정당한 가격에 판매되나 통과하지 못하는 로트는 할인판매를 한다.

여기서 냉동식품 내용물의 함량을 결정하는 충전공정의 평균을 높게 설정하면 충전된 함량이 표시 실량을 초과한 양이 많아져 낭비 요소가 발생되며, 이와는 반대로 공정평균을 낮게 설정하면 표시실량 기준에 미달하는 제품이 발생하게 되어 불합격될 가능성이 높아진다. 불합격되면 로트 전체가 할인판매되어 손실비용이 발생하는 등 상충관계가 존재하므로 충전공정의 목표치를 경제적으로 설정할 필요가 있다.

냉동식품 용기에 담은 내용물의 함량은 평균과 표준편차가 각각 μ, σ 인 정규분포를 따른다고 가정하자. A 가 제품단위당 판매가이고, B 가 불합격 시 발생하는 단위당 할인판매 손실일 때 크기 N 인 검사로트의 기대수익은 합격될 경우 AN , 불합격될 경우 $(A - B)N$ 으로 주어진다.

따라서 이 충전공정의 평균이 $\mu = 1000 + c\sigma$ 일 때 제품 단위 실량당 원가가 g 이라면 검사로트의 단위제품당 기대이익 $Y(c)$ 는 N 에 무관하게 다음과 같이 주어진다.*

$$\begin{aligned} Y(c) &= AP_a(c) + (A - B)(1 - P_a(c)) - \mu g \\ &= A - (1000 + c\sigma)g - B(1 - P_a(c)) \end{aligned}$$

여기서 $P_a(c)$ 는 다음의 두 요건을 충족하여 로트가 합격될 확률이다(14.5절 참고).

(1) 평균요건

표본으로부터 구한 평균 실량이 규정된 기준 이상이어야 한다.

(2) 개별요건

랜덤하게 추출된 일정한 크기의 표본에서 규정된 실량한계에 미달하는 제품이 일정 개수 이하이어야 한다.

그동안의 충전공정 운용실적에 의해 s 를 σ 로 대체할 수 있을 때 상기 식의 기대이익을 최대화하는 c 를 보다 수월하게 설정할 수 있을 것이다. 한편 최적 c 는 공정의 목표치인 평균이 일반적으로 표시 실량을 초과해야 하므로 양수 값을 가진다.

자료: * 서순근(2015).

이 장의 요약

이 장은 SQC 관련 문제에서 당면할 수 있는 여러 수학모형을 대상으로 주로 고전적 최적화 방법에 의해 최적값을 구하거나 수치해법으로 비선형/적분 방정식의 해를 구하는 문제를 다룬다. 먼저 14.2절에서는 기본적인 경제적 모형하에서 양쪽 규격하의 공정평균 설정 문제를, 14.3절~14.4절에서는 용기 충전공정의 경제적 공정평균 설정문제를 살펴본다. 14.5절에서는 실량표시상품에 부과되는 두 가지 요건(개별 및 평균)에 따른 공정평균 설정문제와 더불어 샘플링 검사계획을 소개한다.

14.6절에서는 공정평균이 시간 경과에 따라 체계적으로 변화할 경우에 생산주기와 더불어 공정평균의 설정문제를, 14.7절에서는 공정 준비작업에서 설정된 값이 목표치와 차이가 있을 때 보정하는 조화규칙을 살펴본다. 그리고 14.8절에서는 제품 성능의 직접 검사가 비경제적이나 불가능할 경우에 쓰일 수 있는 대응특성을 이용한 선별검사 기준치의 도출을, 마지막 절인 14.9절에서는 부품을 조립할 때 대응하는 등급끼리 택하여 조립하는 선택조립의 방법과 이에 관한 타당성과 유용성을 소개한다.

14.1 | 개요

대부분의 기업에서는 이익(비용)을 최대(최소)화하기 위해 효율적인 생산방법으로 고품질의 제품을 생산하는 데 집중하고 있다. 보다 높은 품질은 더 적은 재작업과 지연시간, 그리고 비용

절감을 가져오며, 이로부터 제품의 시장 점유율을 증가시켜 보다 나은 사업성과를 얻게 되므로 통계적 품질관리(SQC) 부문에서 최적화 모형과 방법의 활용은 필수적이다.

SQC의 최적화 문제로는 관리도의 통계적 또는 경제적 설계, 반응표면분석법에서의 최적화, 다특성치 문제, 실험계획법의 최적설계, 품질특성치 분포의 모수 추정 등 여러 가지가 있다. 이에 관심이 있는 독자는 본서의 해당 장 및 Carlyle et al.(2000)의 논문과 이의 논평을 참고하기 바란다.

SQC의 주 관심 대상인 공정 변동은 목표치와의 편차의 제곱, 즉 편차(공정평균과 목표치의 차)의 제곱과 공정분산의 합으로 나타낼 수 있으므로, 현업에서는 이 두 가지를 줄일 수 있도록 노력을 집중하고 있다. 예전에는 공정분산을 불가피한 요인으로 간주하여 전자에 치중하였으나, 다구치의 로버스트 설계가 보급된 이후로는 후자가 더욱 관심의 대상이 되고 있다. 하지만 이를 위해서는 실험계획 등의 통계적 방법에 의한 데이터 분석과정이 수반되어야 하므로 최적화 모형의 대상으로 삼기는 힘들다. 따라서 이 장에서는 공정평균 등을 설정하는 전자를 중점적으로 소개하며, 이와 더불어 이전 장에서 다루지 못한 SQC의 주제인 공정 설정 제어, 대응특성에 의한 검사방법, 선택조립 방식을 살펴본다. 다만 SQC의 가장 중요한 두 주제인 관리도(3부)와 샘플링 검사(5부)의 통계적 또는 경제적 최적설계에 관한 내용은 해당 장을 참고하기 바란다.

1920년대 슈하트에 의해 개발된 관리도가 중심이 되는 통계적 공정관리(SPC)가 지금까지 꾸준히 산업계에서 활용되며 학계의 주요 관심사가 되고 있는데, 1970년대 들어 SQC의 초점이 공정 파라미터와 품질 수준의 선정(selection of quality) 등으로 확충되는 양상을 보이고 있다. 공정평균의 설정은 고전적인 품질관리 문제에 속하지만, 품질특성치의 분포와 파라미터가 주어져 있다고 가정하는 SQC 분야의 경제적·통계적 설계 문제와 달리 분포나 분포 파라미터를 어떻게 설정하는 것이 경제적인가를 다루고 있다. 특히 공정평균의 설정은 식품, 약품, 화장품, 화학 산업 등에서 중요하다. 이들 업종에서는 법령으로 명시된 실량표시 요건을 지켜야 되기 때문에, 부적절한 공정평균의 설정은 부적합품률과 관련비용에 큰 영향을 미친다.

이에 따라 14.2절에서는 양쪽 규격이 주어지는 기본적인 상황에서 기대비용을 최소화하는 공정평균의 설정문제를, 14.3절에서는 손실(그리고 수익)이 품질특성치에 비례하는 용기 충전공정이 하한기준에 미달했을 때 할인 판매하는 경우와 재가공하는 경우 등으로 구분하여 기대이익을 최대화하는 용기 충전공정의 공정평균의 설정문제를 다룬다. 14.4절에서는 전 절의 모형을 확장하여 기준미달 단위에 대해 재가공을 하는 경우에 공정평균과 함께 규격상한까지 설정하여 후자를 초과했을 때도 재작업을 하는 경우를 다룬다.

그리고 14.5절에서는 14.2~14.4절에서 대상으로 설정한 이익이나 비용이 아닌 두 가지 통계적 기준(개별과 평균 요건)을 충족하면서 실량표시 상품의 공정평균을 설정하는 문제와 이런 상

품에 적용되는 샘플링 검사계획을 소개한다. 14.6절에서는 설정된 공정평균이 시간에 따라 체계적인 이동 추세로 변화할 경우에 최적 생산주기 설정과 더불어 공정평균 설정문제를 다룬다. 또한 품질특성이 선형추세를 따를 때 회귀관리도를 이용하여 교정·교체 등을 수행하는 생산주기를 설정하는 방법도 살펴본다. 이런 공정평균과 생산주기의 설정에 관한 최근 연구결과는 Tahera et al.(2008)을 참고하면 된다.

14.7절에서는 기계나 공정의 준비작업(setup)에서 설정된 값이 목표치와 차이가 있을 때 이를 보정하는 Grubbs의 조화 규칙(harmonic rule)을 소개한다.

제품의 성능을 검사하기 위해 파괴시험이 요구되거나 검사비용이 매우 많이 들 경우에는 샘플링 검사 대신 대응특성을 이용하여 전수검사를 실시할 수 있다. 이럴 때 대응특성의 선별검사 기준치를 설정하는 방법을 14.8절에서 다룬다. 마지막으로 부품들을 조립할 때 미리 치수별로 분류한 후 대응되는 등급끼리 선택하여 조립하는 방식이 유용할 수 있는데, 이런 선택조립의 방법과 타당성을 14.9절에서 살펴본다.

이 장은 주로 고전적 최적화 방법 및 비선형/적분 방정식의 수치해법을 활용하여 최적해를 구하고 있으며, 다양한 여건하에서 목적함수 등을 어떻게 수리적으로 모형화하는가를 강조하고 있다. 따라서 독자들은 여기서 소개된 모형과 최적화 방법을 학습하여 본인의 상황에 적합한 SQC 모형을 정식화하고 이를 통해 최적해를 도출하는 데 활용할 수 있을 것이다.

14.2 | 양쪽 규격하의 최적 공정평균 설정

품질특성치가 비교적 큰 분산을 가지면 특성치가 가지는 값의 범위는 규격하한과 상한에 의해 규정되는 공차를 벗어날 수 있다. 이럴 때 공정 엔지니어는 특성치로부터 초래된 불량 또는 부적합에 대한 시정조치를 빠른 시간 내에 용이하게 취할 수 없는 경우를 가끔 당면하게 되는데, 이런 여건에서 공정평균의 적정한 설정은 상당히 중요한 역할을 할 수 있다.

만약 규격하한에 미달할 경우의 폐기나 재작업에 따른 비용이 규격상한을 벗어날 때의 발생 비용과 같다면 최적 공정평균은 허용구간의 중간점으로 설정하면 된다. 이 절에서는 이처럼 대상을 한정된 대칭적인 경우에서 확장하여 발생 비용이 비대칭적일 경우에 최적 공정평균을 설정하는 문제를 다룬다(Chandra, 2001).

이 절에서 다루는 모형에 대한 가정은 다음과 같다.

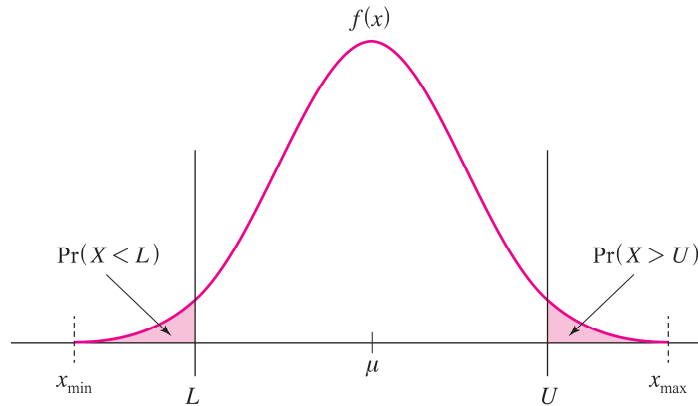


그림 14.1 합격 및 불합격 확률

- ① 품질특성치 X 는 알려지지 않은 평균 μ 와 알려진 표준편차 σ 를 가지는 확률밀도함수(pdf) $f(x)$ 를 따른다.
- ② X 가 가질 수 있는 최솟값과 최댓값은 각각 x_{\min}, x_{\max} 이다.
- ③ 규격하한(LSL)과 상한(USL)은 각각 L, U 이다.
- ④ 품질특성치가 L 에 미달할 경우 폐기 또는 재작업 비용은 단위제품당 c_l 가 발생하며, U 를 초과할 경우 비용은 단위제품당 c_u 가 발생한다.

위의 조건하에서 이 문제는 단위제품당 기대비용 $TC(\mu)$ 을 최소화하는 공정평균 μ 를 찾는 문제로 정식화할 수 있다. 즉, 그림 14.1과 같이 규격하한과 상한을 벗어날 때 발생하는 비용을 각각 $C_L(\mu), C_U(\mu)$ 로 두면 $TC(\mu)$ 는 다음과 같이 두 비용의 기댓값의 합으로 표시된다.

$$\begin{aligned} TC(\mu) &= E[C_L(\mu)] + E[C_U(\mu)] \\ &= c_l \Pr(X < L) + c_u \Pr(X > U) \end{aligned}$$

따라서 $TC(\mu)$ 은 상기 식으로부터 식 (14.1)로 나타낼 수 있다.

$$TC(\mu) = c_l \int_{x_{\min}}^L f(x) dx + c_u \int_U^{x_{\max}} f(x) dx \quad (14.1)$$

일반적으로 μ 가 증가할수록 $E[C_L(\mu)]$ 는 감소하며, $E[C_U(\mu)]$ 는 증가하는 상충관계가 발생하므로 최적 μ 가 존재할 수 있다. 이런 관계를 가지는 식 (14.1)의 형태를 그림 14.2에서 볼 수 있다.

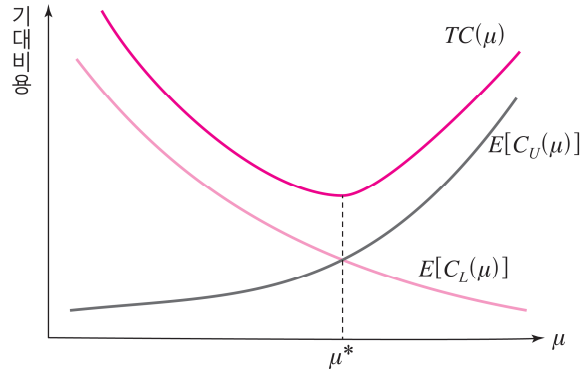


그림 14.2 평균과 기대비용과의 관계

$Z = (X - \mu) / \sigma$ 로 표준화하면 Z 의 평균과 표준편차는 0과 1이 되므로, 식 (14.1)을 Z 와 이의 확률밀도함수 $f_Z(z)$ 로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$TC(\mu) = c_l \sigma \int_{(x_{\min} - \mu) / \sigma}^{(L - \mu) / \sigma} f_Z(z) dz + c_u \sigma \int_{(U - \mu) / \sigma}^{(x_{\max} - \mu) / \sigma} f_Z(z) dz \quad (14.2)$$

먼저 최적 μ 가 존재하는 조건을 검토해보자. 식 (14.2)를 μ 에 대해 미분하여 0이 되는 방정식인 식 (14.3)의 해로부터 최적 공정평균을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dTC(\mu)}{d\mu} &= c_l \sigma \left[f_Z \left(\frac{L - \mu}{\sigma} \right) \left(-\frac{1}{\sigma} \right) - f_Z \left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} \right) \left(-\frac{1}{\sigma} \right) \right] \\ &+ c_u \sigma \left[f_Z \left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} \right) \left(-\frac{1}{\sigma} \right) - f_Z \left(\frac{U - \mu}{\sigma} \right) \left(-\frac{1}{\sigma} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.3)$$

식 (14.3)의 도출 시에 다음의 라이프니츠 적분 공식(Leibniz rule)을 이용한다.

$$\frac{d}{d\theta} \left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x, \theta) dx \right) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} dx + f(b(\theta), \theta) b'(\theta) - f(a(\theta), \theta) a'(\theta)$$

식 (14.3)은 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\frac{c_l}{c_u} = \frac{f_Z \left(\frac{U - \mu}{\sigma} \right) - f_Z \left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} \right)}{f_Z \left(\frac{L - \mu}{\sigma} \right) - f_Z \left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} \right)} \quad (14.4)$$

식 (14.4)에서 $f_Z((x_{\max} - \mu) / \sigma)$ 와 $f_Z((x_{\min} - \mu) / \sigma)$ 가 0이 될 때 식 (14.5)의 관계가 성립한다.

$$\frac{c_l}{c_u} = \frac{f_Z\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right)}{f_Z\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)} \quad (14.5)$$

식 (14.5)는 L 과 U 을 벗어날 때 재작업이나 폐기비용의 비가 U 와 L 에서 두 표준화된 확률 밀도의 비와 일치하도록 μ 를 설정해야 함을 보여주고 있다.

다음으로 식 (14.3)을 한 번 더 미분하여 식 (14.4)에서 구한 μ^* 가 유일하게 존재할 충분조건을 구하면

$$c_l \left(f_Z' \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \right) - f_Z' \left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} \right) \right) - c_u \left(f_Z' \left(\frac{U-\mu}{\sigma} \right) - f_Z' \left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} \right) \right) > 0 \quad (14.6)$$

이 되며, 식 (14.4)와 식 (14.6)을 결합하면 식 (14.7)이 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} & \left(f_Z \left(\frac{U-\mu}{\sigma} \right) - f_Z \left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} \right) \right) \left(f_Z' \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \right) - f_Z' \left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} \right) \right) \\ & > \left(f_Z \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \right) - f_Z \left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} \right) \right) \left(f_Z' \left(\frac{U-\mu}{\sigma} \right) - f_Z' \left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (14.7)$$

식 (14.7)에서 $f_Z((x_{\max} - \mu)/\sigma)$ 와 $f_Z((x_{\min} - \mu)/\sigma)$ 가 0이 될 때 다음과 같은 간략화된 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} & f_Z \left(\frac{U-\mu}{\sigma} \right) \left(f_Z' \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \right) - f_Z' \left(\frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} \right) \right) \\ & > f_Z \left(\frac{L-\mu}{\sigma} \right) \left(f_Z' \left(\frac{U-\mu}{\sigma} \right) - f_Z' \left(\frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (14.8)$$

이제부터 X 가 각각 정규분포와 베타분포를 따를 때를 상기의 도출과정에 적용하여 최적 μ 가 어떻게 존재하는가를 자세하게 검토해보자.

14.2.1 정규분포를 따를 경우

정규분포를 따르면 $x_{\min} = -\infty$, $x_{\max} = \infty$ 이고, 표준 정규분포의 확률밀도함수(pdf)와 누적분포함수(cdf)를 각각 $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ 라 표기하면 $\phi((x_{\max} - \mu)/\sigma)$, $\phi((x_{\min} - \mu)/\sigma)$ 와 $\phi'((x_{\max} - \mu)/\sigma)$, $\phi'((x_{\min} - \mu)/\sigma)$ 가 모두 0이 되며,

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = -z\phi(z)$$

의 관계가 성립한다.

따라서 식 (14.8)로부터 다음 조건이 성립하면 되는데,

$$\frac{L-\mu}{\sigma^2} < \frac{U-\mu}{\sigma^2}$$

$L < \mu < U$ 이 되므로 항상 이 조건을 만족한다.

따라서 최적 $\mu(\mu^*)$ 은 식 (14.5)에 의해 다음의 비선형 방정식으로부터 구해진다.

$$\frac{c_l}{c_u} = \frac{\phi((U-\mu^*)/\sigma)}{\phi((L-\mu^*)/\sigma)} = \exp\left[-\frac{(U-\mu^*)^2 - (L-\mu^*)^2}{2\sigma^2}\right]$$

상기 식을 단순화하면

$$-2\sigma^2 \ln\left(\frac{c_l}{c_u}\right) = (U-\mu^*)^2 - (L-\mu^*)^2$$

이 되므로, μ^* 는 다음과 같이 구해진다.

$$\mu^* = \frac{\sigma^2}{U-L} \ln\left(\frac{c_l}{c_u}\right) + \frac{U+L}{2} \quad (14.9)$$

식 (14.9)를 보면 $c_l = c_u$ 이면 $\mu^* = \frac{U+L}{2}$ 가 되며, μ^* 는 $c_l < c_u$ 이면 $(U+L)/2$ 에서 L 쪽으로 이동하며, $c_l > c_u$ 이면 반대로 U 쪽으로 이동한다.

예제 14.1 부품의 규격이 $2 \pm 0.08\text{cm}$ 이고 규격하한과 상한을 벗어날 때의 비용은 각각 20,000원, 16,000원이다. 공정 표준편차가 0.04cm일 때 최적 공정평균을 구하라.

식 (14.9)에 대입하면 최적 공정평균은 다음과 같이 2.0022cm가 된다.

$$\mu^* = \frac{0.04^2}{2.08 - 1.92} \ln\left(\frac{20000}{16000}\right) + \frac{2.08 + 1.92}{2} = 2.0022$$

14.2.2 베타분포를 따를 경우

두 모수에 의해 규정되며, 분포형태가 종 모양으로 일정한 정규분포는 다양한 형태의 분포를 나타낼 수 없다. 이와는 달리 베타분포는 그림 14.3과 같이 한정된 범위에서 대칭, 균일, 비대칭 등 다양한 모양의 분포를 표현할 수 있으며, 파라미터도 4개($\alpha, \beta, x_{\min}, x_{\max}$)가 되어 보다 높은 유연성을 가지고 있다. $W = (X - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min})$ 로 정의하면 $w_{\min} = 0, w_{\max} = 1$ 가 되는데, α, β 에 따른 베타분포(W)의 여러 형태를 그림 14.3에서 확인할 수 있다.

베타분포를 따르는 X 와 W 의 확률밀도함수는

$$f_X(x) = \frac{1}{\Delta_x \cdot B(\alpha, \beta)} \left(\frac{x - x_{\min}}{\Delta_x} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x - x_{\min}}{\Delta_x} \right)^{\beta-1}, \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

$$f_W(w) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1}, \quad 0 \leq w \leq 1$$

$$\text{단, } \Delta_x = x_{\max} - x_{\min}, \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv$$

로 나타낼 수 있으며, X 의 기댓값과 분산은 다음과 같다.

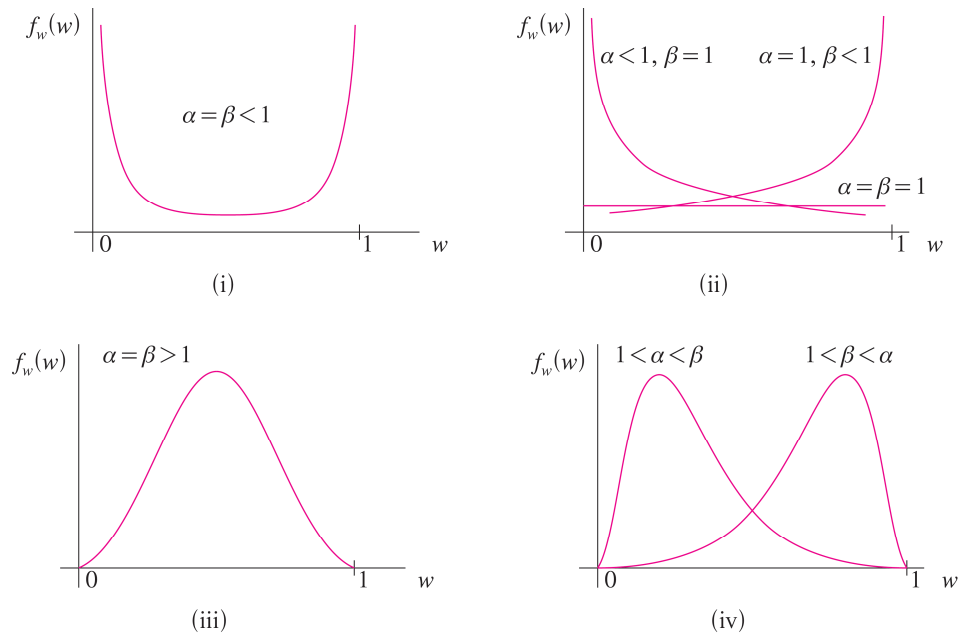


그림 14.3 베타분포의 형태

$$\mu = E(X) = (x_{\max} - x_{\min}) \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + x_{\min} = \Delta_x \gamma + x_{\min} \quad (14.10)$$

$$\sigma^2 = \frac{\Delta_x^2 \alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} = \frac{\Delta_x^2 \gamma^2 \beta}{\alpha (\alpha + \beta + 1)} \quad (14.11)$$

단, $\gamma = \alpha / (\alpha + \beta)$

표준화된 베타 확률변수 Z 의 확률밀도함수를 다음과 같이 나타낼 수 있으므로,

$$f_Z(z) = \frac{\sigma}{\Delta_x B(\alpha, \beta)} \left(\frac{\sigma z + \mu - x_{\min}}{\Delta_x} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\sigma z + \mu - x_{\min}}{\Delta_x} \right)^{\beta-1} \quad (14.12)$$

$f_Z((x_{\min} - \mu)/\sigma) = f_Z((x_{\max} - \mu)/\sigma) = f'_Z((x_{\min} - \mu)/\sigma) = f'_Z((x_{\max} - \mu)/\sigma) = 0$ 인 점을 이용하면 유일한 최적해가 존재할 조건인 식 (14.7)은 식 (14.13)으로 단순화된다.

$$f_Z\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) f'_Z\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right) > f_Z\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right) f'_Z\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) \quad (14.13)$$

여기서 $f'_Z(z) = \frac{df_Z(z)}{dz}$ 를 구하면

$$\begin{aligned} f'_Z(z) &= \frac{\sigma^2}{\Delta_x^3 \cdot B(\alpha, \beta)} \left(\frac{\sigma z + \mu - x_{\min}}{\Delta_x} \right)^{\alpha-2} \left(1 - \frac{\sigma z + \mu - x_{\min}}{\Delta_x} \right)^{\beta-2} \\ &\quad \times [(\alpha-1)(\Delta_x - \sigma z + \mu - x_{\min}) + (\beta-1)(\sigma z + \mu - x_{\min})] \end{aligned}$$

가 되므로, 식 (14.13)은 $\alpha = \beta = 1$ 인 경우(즉, 균일분포)를 제외하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} &(U - x_{\min})(x_{\max} - U)[(\alpha-1)(x_{\max} - L) - (\beta-1)(L - x_{\min})] \\ &> (L - x_{\min})(x_{\max} - L)[(\alpha-1)(x_{\max} - U) - (\beta-1)(U - x_{\min})] \end{aligned} \quad (14.14)$$

$x_{\min} < L < U < x_{\max}$ 인 조건을 이용하여 양변의 첫 두 항으로 각각 나누면, 식 (14.14)는 $\alpha = \beta = 1$ 인 경우를 제외하면 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\frac{\alpha-1}{U - x_{\min}} - \frac{\beta-1}{x_{\max} - U} < \frac{\alpha-1}{L - x_{\min}} - \frac{\beta-1}{x_{\max} - L} \quad (14.15)$$

따라서 식 (14.15)를 충족할 때 식 (14.10)에서 $x_{\min} = \mu - \Delta_x \gamma$ 가 되므로, 식 (14.5)에 이를 대입하면 최적 $\mu(\mu^*)$ 는 다음 식을 만족하는 해가 된다.

$$\frac{c_l}{c_u} = \frac{(U - \mu^* + \Delta_x \gamma)^{\alpha-1} (\Delta_x - U + \mu^* - \Delta_x \gamma)^{\beta-1}}{(L - \mu^* + \Delta_x \gamma)^{\alpha-1} (\Delta_x - L + \mu^* - \Delta_x \gamma)^{\beta-1}} \quad (14.16)$$

예제 14.2 부품의 규격이 $3 \pm 0.01\text{cm}$ 이고 규격하한과 상한을 벗어날 때의 비용은 각각 20만 원과 2만 원이다. $x_{\max} = 3.018$, $x_{\min} = 2.982$ 이고 α, β 가 각각 4와 2인 베타분포를 따를 때 최적 공정평균을 구하라.

$\Delta_x = 0.036$, $\gamma = 4/(4+2) = 2/3$, $U = 3.01$, $L = 2.99$ 이므로 식 (14.16)에 대입하면

$$\frac{(3.034 - \mu^*)^3 (\mu^* - 2.998)}{(3.014 - \mu^*)^3 (\mu^* - 2.978)} = 10$$

이 되므로, 이를 풀면 최적 공정평균은 3.0054cm 가 된다. 또한 식 (14.15)에 대입하면 좌변과 우변이 각각 -17.86 과 339.29 가 되어 이 조건을 만족하므로 유일한 최적해가 된다. 따라서 현 공정평균 $\mu = 0.036(2/3) + 2.982 = 3.006\text{cm}$ 이므로 현 공정분포의 평균을 왼쪽으로 0.0006cm 만큼 이동시켜야 한다.

14.3 | 용기 충전공정의 최적 공정평균 설정

액체나 분말, 점성성분(이하 내용물)을 빈 용기에 충전하는 식품, 의약품, 화학 등의 제조공정을 고려하자. 충전공정에서 생산된 제품은 그림 14.4와 같이 내용물 용량을 측정하며, 하한규격 L 을 충족하는 단위는 정당한 가격에 판매되나 규격에 미달하는 단위는 재충전, 할인판매 또는 다른 용도로 사용되거나 폐기 처분된다.

용기에 담는 내용물의 함량은 정규분포를 따른다고 가정하자. 여기서 내용물의 함량을 결정하는 충전공정의 평균을 높게 설정하면 충전된 함량이 기준 L 을 초과한 양이 많아져 낭비 요소가 발생되며, 이와는 반대로 공정평균을 낮게 설정하면 기준에 미달된 제품이 발생하여 부적합품으로 인한 손실비용이 발생하는 상충관계가 존재한다. 이런 문제를 **canning** 또는 **target value problem**이라 부른다.

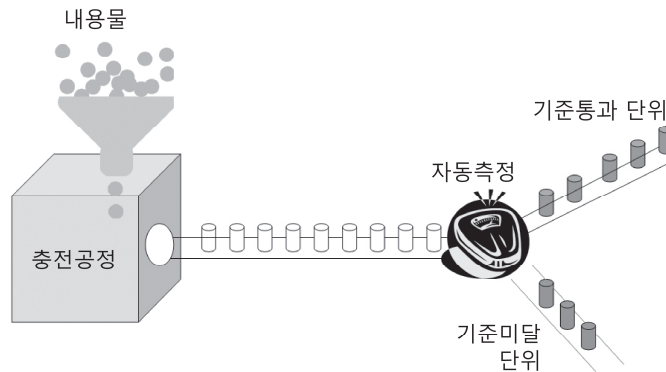


그림 14.4 용기 충전공정

이 절에서는 먼저 규격에 미달하는 제품을 할인 판매하는 경우(Hunter and Kartha, 1977)와 재가공하는 경우(Golhar, 1987)로 구분하여 전수검사 시에 최적 공정평균을 설정하는 문제를 소개하며, 더불어 수익이 내용물 용량에 비례하는 경우로 확장한다. 그리고 다음 절에서는 규격 미달 제품을 재가공하는 경우에 규격상한까지 동시에 설정하는 문제를 다룬다.

14.3.1 할인 판매하는 경우

내용물의 함량 X 는 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따르며, σ^2 은 알려져 있다고 가정한다. 만일 그림 14.5와 같이 특정 제품의 함량이 규격하한 L 이상이면 단위제품당 a 의 이익을 얻으며, 규격하한에 미달 되면 할인 판매되어 $r (< a)$ 의 이익을 얻는다. 그리고 L 을 초과하는 내용물의 함량은 함량 단위당 g 만큼 공짜(give-away) 비용을 초래한다.

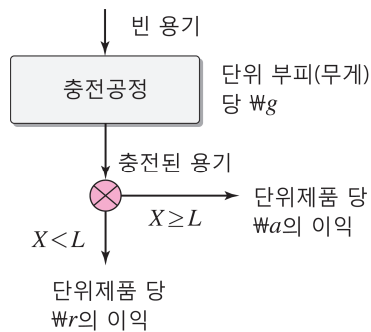


그림 14.5 할인 판매하는 경우

따라서 실제 계량된 내용물의 양이 x 일 때 단위제품당 이익함수 P 는

$$P = \begin{cases} a - g(x - L), & x \geq L \\ r, & x < L \end{cases}$$

로 나타낼 수 있으므로, 단위제품당 기대이익 $E[P]$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$E[P] = a \int_L^\infty f(x)dx - g \int_L^\infty (x - L)f(x)dx + r \int_{-\infty}^L f(x)dx \quad (14.17)$$

X 가 $N(L + \delta, \sigma^2)$ 를 따르고, $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ 를 표준정규분포의 pdf와 cdf로 정의할 때 $\int z\phi(z)dz = -\phi(z)$, $\phi(-z) = \phi(z)$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ 를 이용하면 식 (14.17)의 두 번째 항은

$$\int_L^\infty (x - L)f(x)dx = \int_{-\delta/\sigma}^\infty (\sigma z + \delta)\phi(z)dz = \sigma\phi(\delta/\sigma) + \delta\Phi(\delta/\sigma) \quad (14.18)$$

이 되므로, 식 (14.17)은 식 (14.18)을 이용하여 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned} E[P] &= a\Phi(\delta/\sigma) - g(\delta\Phi(\delta/\sigma) + \sigma\phi(\delta/\sigma)) + r\Phi(-\delta/\sigma) \\ &= r + (a - r - g\delta)\Phi(\delta/\sigma) - g\sigma\phi(\delta/\sigma) \end{aligned} \quad (14.19)$$

식 (14.19)를 최대로 하는 공정평균은 δ 에 의해 결정되므로, 식 (14.19)를 δ 에 대해 미분하여 0이 되는 방정식인 식 (14.20)의 해로부터 최적 공정평균을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dE[P]}{d\delta} &= \frac{(a - r - g\delta)\phi(\delta/\sigma)}{\sigma} - g\Phi(\delta/\sigma) + \frac{g\sigma(\delta/\sigma)\phi(\delta/\sigma)}{\sigma} \\ &= \frac{(a - r)\phi(\delta/\sigma)}{\sigma} - g\Phi(\delta/\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (14.20)$$

식 (14.20)으로부터 최적 δ (δ^*)는 다음 조건을 만족한다.

$$\frac{\phi(\delta^*/\sigma)}{\Phi(\delta^*/\sigma)} = k \quad (14.21)$$

$$\left(\text{단, } k = \frac{g\sigma}{a - r}\right)$$

δ^* 는 특수한 경우가 아니면 보통 양수가 되며, $\delta \geq 0$ 일 때 $E[P]$ 는 위로 볼록한(concave) 함수가 됨을 보일 수 있으므로(연습문제 14.8 참고), 식 (14.21)에서 도출된 공정평균인 $L + \delta^*$ 은 $E[P]$ 를 최대화하는 최적값이 된다.

그림 14.6은 δ^*/σ 와 k 의 관계를 도시하고 있는데, 이 그림으로부터 k (즉, 그림에서 예제 14.3에 해당하는 0.5)가 주어지면 최적 δ ($0.518\sigma \approx 0.52\sigma$)를 구할 수 있다.

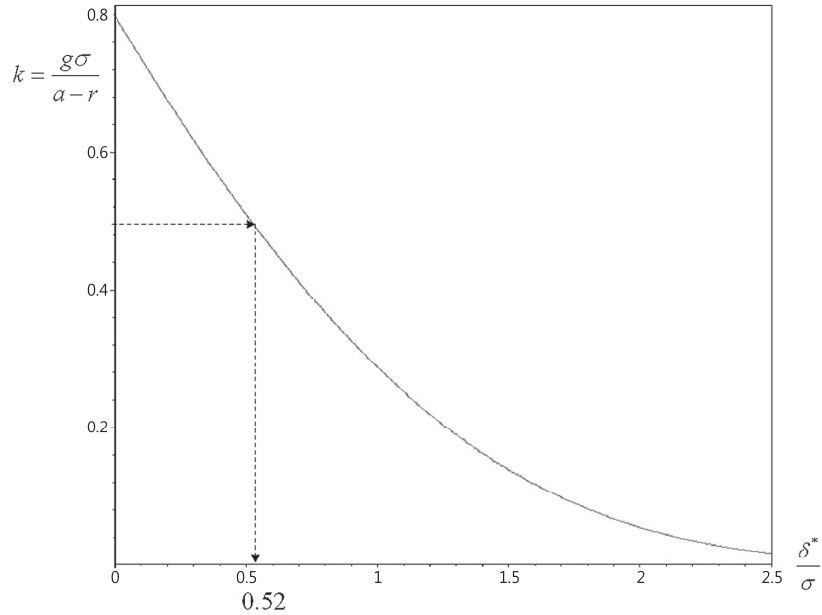


그림 14.6 할인 판매하는 경우: 최적 δ/σ

예제 14.3 어떤 화학물질을 담는 충전공정에서 화학물질은 1kg당 5,000원, 표준편차는 0.4kg, 하한 기준 3kg을 통과한 단위제품의 이익은 6,000원이고, 기준에 미달한 제품의 이익은 2,000원이다. 기준 미달 제품을 할인 판매할 경우에 최적 공정평균을 얼마로 설정해야 되겠는가?

$k = (5,000)(0.4)/(6,000 - 2,000) = 0.5$ 이므로 식 (14.21) 또는 그림 14.6으로부터 구한 $\delta^* = (\delta^*/\sigma)\sigma = (0.518)(0.4) = 0.207$ 이 되므로 공정평균을 3.207kg으로 설정하면 단위당 기대이익은 식 (14.19)로부터 3,370원이 된다. 그림 14.7을 보면 기대이익 함수가 위로 볼록하여 최댓값이 유일하게 존재함을 확인할 수 있다.

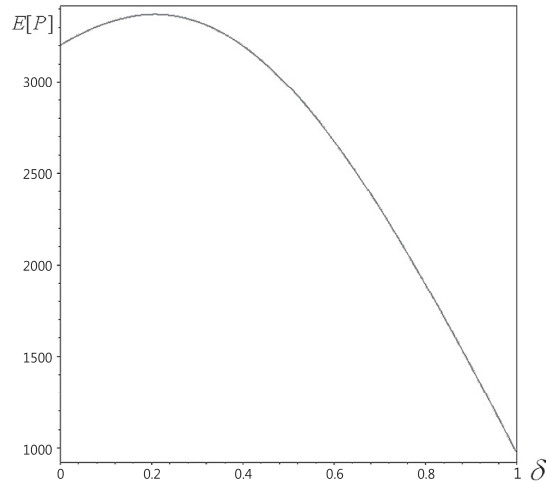


그림 14.7 기대이익 함수 형태: 예제 14.3

14.3.2 재가공하는 경우

내용물이 고가인 경우는 규격에 미달하는 단위제품을 할인하여 판매하기보다는 용기를 비우고 내용물을 재충전하여 판매하는 것이 경제적일 수 있다. 이런 경우를 다룬 모형은 Golhar (1987)에 의해 제시되었는데, 할인 판매하는 경우와 동일한 가정과 기호를 채택하기 위해 기존 모형을 약간 변형한다.

즉, 그림 14.8과 같이 주어진 기준하한 L 을 통과하는 제품은 할인 판매하는 경우와 마찬가지로 단위제품당 a 의 이익이 발생되며, 기준하한 L 에 미달되는 제품의 용기를 비우고 재충전하는 데 R 만큼의 추가비용이 든다고 가정하자. 나머지 기호와 정의는 할인 판매하는 경우와

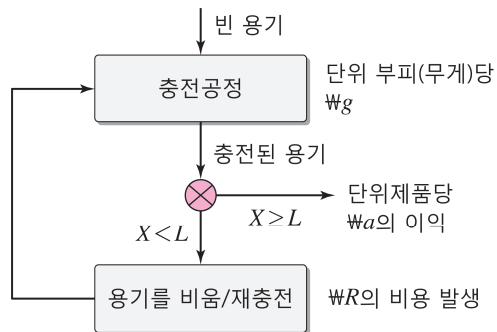


그림 14.8 재가공하는 경우

동일하다.

이런 조건하에서 실제 계량된 내용물의 양이 x 일 때 단위제품당 이익함수 P 는 $x < L$ 일 때 기대이익(재차 L 보다 작을 경우를 반영)에서 발생비용을 차감한 형태로 다음과 같이 된다.

$$P = \begin{cases} a - g(x - L), & x \geq L \\ E[P] - R, & x < L \end{cases} \quad (14.22)$$

따라서 평균이 $L + \delta$ 일 때 기대이익은 다음과 같이 나타낼 수 있으므로,

$$\begin{aligned} E[P] &= a \int_L^\infty f(x)dx - g \int_L^\infty (x - L)f(x)dx + \int_{-\infty}^L (E[P] - R)f(x)dx \\ &= (E[P] - R)\Phi(-\delta/\sigma) + a(1 - \Phi(-\delta/\sigma)) - g(\sigma\phi(\delta/\sigma) + \delta\Phi(\delta/\sigma)) \end{aligned}$$

이로부터 $E[P]$ 는 식 (14.23)과 같이 된다.

$$E[P] = a - g\delta + R - \frac{R + g\sigma\phi(\delta/\sigma)}{\Phi(\delta/\sigma)} \quad (14.23)$$

기대이익을 최대화 하는 공정평균은 식 (14.23)을 미분하여 0으로 둔 방정식의 해로부터 구할 수 있으므로 최적 $\delta(\delta^*)$ 는 다음 비선형방정식의 근이 된다(연습문제 14.9 참고).

$$K^2(\delta^*/\sigma) + \frac{MK(\delta^*/\sigma)}{\Phi(\delta^*/\sigma)} + \frac{\delta^*K(\delta^*/\sigma)}{\sigma} = 1 \quad (14.24)$$

$$\text{(단, } M = \frac{R}{g\sigma} \text{ 이고 } K(\cdot) = \frac{\phi(\cdot)}{\Phi(\cdot)} \text{ 임.)}$$

Golhar(1987)는 해석적으로 δ 에 대해 식 (14.23)이 위로 볼록한 함수임을 보일 순 없지만 여러 조건하에서 그래프를 그려 보면 위로 볼록한 함수가 된다고 주장하고 있으며, 식 (14.24)의 해를 식 (14.25)와 같이 근사적으로 구할 수 있다고 보고하고 있다.

$$\delta^* \approx \sigma [0.712 + 0.47\ln(M)] \quad (14.25)$$

예제 14.4 어떤 화학물질을 담은 충전공정에서 화학물질은 1kg당 5,000원, 표준편차는 0.4kg, 하한 기준 3kg을 통과한 단위제품의 이익은 6,000원이고 기준에 미달한 제품의 재가공 비용은 3,000원이다. 기준 미달 제품을 재가공할 경우에 최적 공정평균을 설정하라.

$M = 3000 / (5000 \cdot 0.4) = 1.5$ 이므로 식 (14.24)를 수치해법으로 풀거나 근사해가 되는 식

(14.25)로부터 구한 $\delta^* = 0.360$ 이 되므로 공정평균을 3.360kg으로 설정하면 단위당 기대이익은 식 (14.23)으로부터 2,871원이 된다. 그리고 그림 14.9를 보면 기대이익 함수가 위로 볼록하여 최댓값이 유일하게 존재함을 알 수 있다.

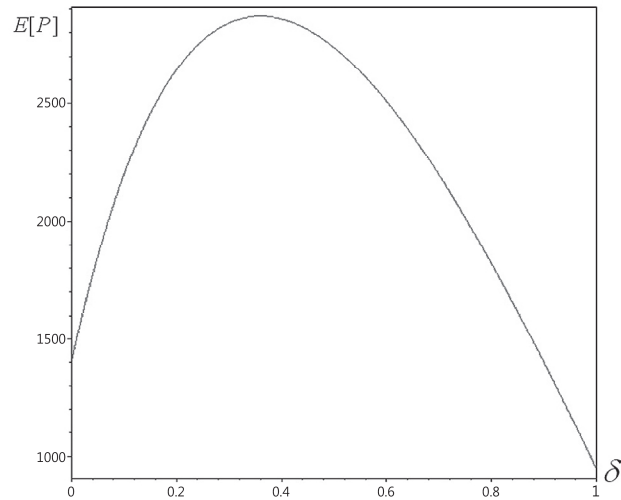


그림 14.9 기대이익 함수 형태: 예제 14.4

14.3.3 수익이 내용물 용량에 비례할 경우

14.3.1절에서 소개된 규격에 미달하는 제품을 할인 판매하는 경우의 Hunter and Kartha (1977)의 모형을 그림 14.10처럼 다음과 같이 확장해보자(Carlsson, 1984).

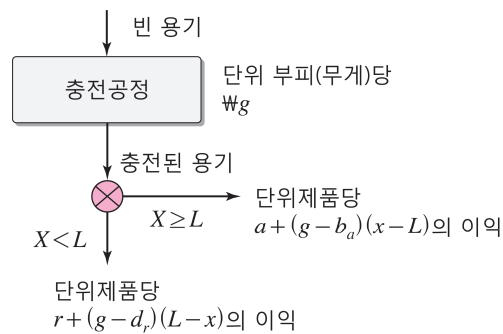


그림 14.10 비용과 수익이 내용물 용량에 비례할 경우

- ① 규격하한 L 이상인 단위제품의 이익은 a 로 일정하지 않고, 초과한 내용물의 양($x-L$)에 비례하여 단위 내용물당 b_a 의 추가 수익을 얻는다.
- ② 규격하한 L 에 미달하여 할인 판매된 단위제품의 이익은 $r (< a)$ 로 일정하지 않고, 미달되는 내용물의 양($L-x$)에 비례하여 단위 내용물당 d_r 만큼 할인하여 판매하므로, 고정 이익 r 에 단위 내용물당 $g-d_r (> 0)$ 의 일부 보상을 받거나 $g-d_r (< 0)$ 의 추가 할인을 하는 셈이 된다.

따라서 실제 계량된 내용물의 양이 x 일 때 단위제품당 이익함수 P 는

$$P = \begin{cases} a - (g - b_a)(x - L), & x \geq L \\ r + (g - d_r)(L - x), & x < L \end{cases}$$

의 형태가 되며, $h = g - b_a$, $\rho = (d_r - b_a)/h$ 로 정의하면 P 는 다음과 같이 적을 수 있다.

$$P = \begin{cases} a - h(x - L), & x \geq L \\ r - h(1 - \rho)(x - L), & x < L \end{cases} \quad (14.26)$$

여기서 $b_a = 0$, $d_r = g$ (즉, $h = g, \rho = 1$)이면 식 (14.26)은 14.3.1절의 Hunter and Kartha (1977)의 모형이 되며, 대체적으로 $0 \leq b_a \leq d_r$ 와 $0 \leq b_a \leq g$ 의 관계가 성립하므로 ρ 는 0 이상의 값을 가진다고 볼 수 있다. 그림 14.11에 ρ 에 따른 P 의 형태가 도시되어 있다. 즉, $0 \leq \rho < 1$ 이면 $d_r \leq g$, $\rho > 1$ 이면 $d_r > g$ 가 되어, L 에 미달 시 전자는 일부 보상을, 후자는 추가 할인을 적용하는 경우가 된다.

공정평균이 $L + \delta$ 일 때 단위제품당 기대이익 $E[P]$ 는 다음과 같이 주어지므로,

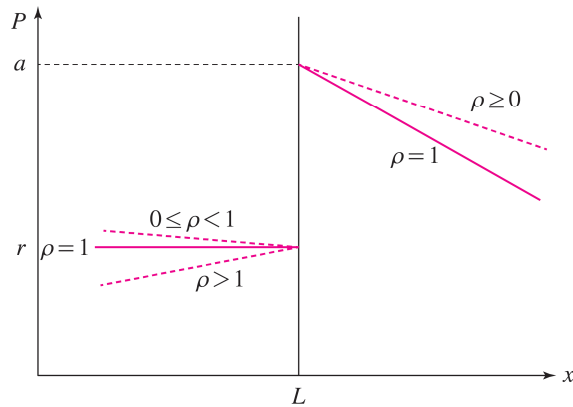


그림 14.11 ρ 에 따른 이익함수 형태

$$\begin{aligned}
E[P] &= a \int_L^\infty f(x)dx - h \int_L^\infty (x-L)f(x)dx + r \int_{-\infty}^L f(x)dx \\
&\quad - h(1-\rho) \int_{-\infty}^L (x-L)f(x)dx
\end{aligned} \tag{14.27}$$

식 (14.27)은 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned}
E[P] &= a\Phi(\delta/\sigma) - h(\delta\Phi(\delta/\sigma) + \sigma\phi(\delta/\sigma)) + r\Phi(-\delta/\sigma) - h(1-\rho)(-\sigma\phi(\delta/\sigma) + \delta\Phi(-\delta/\sigma)) \\
&= a\Phi(\delta/\sigma) + r\Phi(-\delta/\sigma) - h\rho\sigma\phi(\delta/\sigma) + h\rho\delta\Phi(-\delta/\sigma) - h\delta \\
&= r - h\delta(1-\rho) + (a-r-h\rho\delta)\Phi(\delta/\sigma) - h\rho\sigma\phi(\delta/\sigma)
\end{aligned} \tag{14.28}$$

식 (14.28)을 최대로 하는 공정평균은 δ 에 의해 결정되므로, 식 (14.28)을 δ 에 대해 미분한 식이 0이 되는 방정식인 식 (14.29)의 해로부터 최적 공정평균을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{dE[P]}{d\delta} &= -h(1-\rho) - h\rho\phi(\delta/\sigma) + \frac{(a-r-h\rho\delta)\phi(\delta/\sigma)}{\sigma} + \frac{h\rho\delta\phi(\delta/\sigma)}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\sigma} [-h\sigma(1-\rho) - h\rho\sigma\phi(\delta/\sigma) + (a-r)\phi(\delta/\sigma)] = 0
\end{aligned} \tag{14.29}$$

따라서 $k = h\sigma/(a-r)$ 로 두면 δ^* 는 다음을 만족한다.

$$\phi(\delta^*/\sigma) = \rho k \Phi(\delta^*/\sigma) + k(1-\rho) \tag{14.30}$$

식 (14.30)의 특수한 경우로 ρ 가 1이 되면 Hunter and Kartha(1977)의 모형인 식 (14.21)(여기서 $g = h$)이 되며, ρ 가 0이 되면(즉, $b_a = d_r$ 로 규격하한을 초과한 단위 내용물 양에 따른 추가 수익과 미달된 단위 내용물 양에 따른 할인금액의 계량단위당 단가가 같을 경우) 식 (14.28)과 식 (14.30)은 다음과 같이 단순해진다.

$$E[P]_0 = r - h\delta + (a-r)\Phi(\delta/\sigma) \tag{14.31}$$

$$\phi(\delta^*/\sigma) = k \tag{14.32}$$

따라서 이 경우의 최적 $\delta(\delta^*)$ 은 $k < (2\pi)^{-1/2} = 0.399$ 이면 다음과 같이 구해진다.

$$\delta^* = \sigma [(-\ln(2\pi k^2))^{1/2}] \tag{14.33}$$

한편 Carlsson(1984)는 $0 \leq \rho \leq 1$ 일 경우에 δ^*/σ 는 $\ln k$ 에 따라 근사 선형형태로 감소한다고 보고하고 있으며, 특히 $k < 0.1$ 일 때 δ^*/σ 는 ρ 와 거의 독립적으로 결정되므로 식 (14.33)을 식 (14.30)에서 구해야 되는 δ^* 의 근사값으로 추천하고 있다. 그는 더불어 식 (14.28)의 $E[P]$ 가 δ^*

에서 유일하게 존재하는 조건을 제시하고 있다.

예제 14.5 규격하한을 초과한 철재 건축자재는 단위제품당 이익이 50,000원이고 초과한 m당 40,000원의 보상을 받으며, 규격하한에 미달한 자재는 단위제품당 이익이 10,000원이고 미달한 m당 할인액은 60,000원이다. 공짜 비용은 m당 70,000원이고 표준편차는 0.1m 일 때 최적 공정평균을 구하라.

$h = g - b_a = 70,000 - 40,000 = 30,000$, $\rho = \frac{d_r - b_a}{h} = \frac{60,000 - 40,000}{30,000} = \frac{2}{3}$, $k = \frac{h\sigma}{a - r} = \frac{(30,000)(0.1)}{50,000 - 10,000} = 0.075$ 를 식 (14.30)에 대입하여 수치해법으로 풀면, 그림 14.12와 같이 유일한 최적해가 존재하며, $\delta^* = 0.184$ 가 되므로 $\mu^* = 1.184$, 식 (14.28)로부터 이때의 단위당 기대이익은 43,139원이 된다. $k < 0.1$ 이므로 식 (14.33)에 의해 구한 근사 최적 δ 는 0.183이 되어 거의 근접한 값을 얻을 수 있다. 참고로 Hunter and Kartha(1977) 모형 ($\rho = 1$)에 적용하면 $\delta^* = 0.185$ 가 된다.

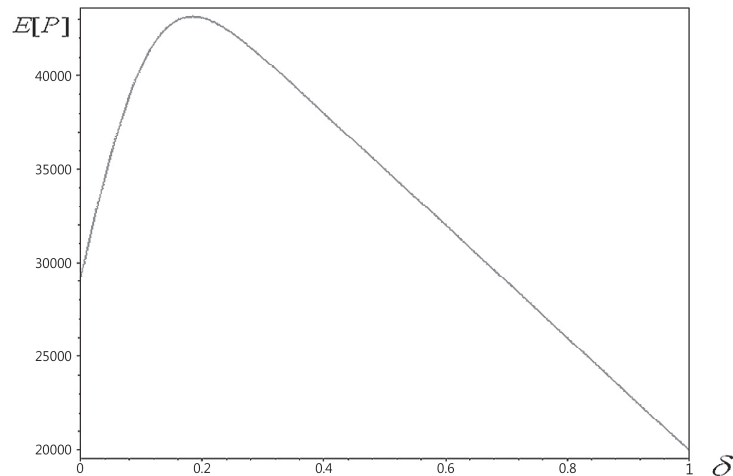


그림 14.12 기대이익 함수 형태: 예제 14.5

표 14.1에는 $k = 0.05, 0.2$ 이고 $\rho = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ 일 때 σ 에 따른 δ^* 와 식 (14.33)에 의한 근사 δ^* 가 정리되어 있는데, 특히 k 가 작을 때 근사 δ^* 가 참값에 상당히 근접함을 알 수 있다. 또한 δ^* 는 k 가 커지면 감소함을, ρ 가 커지면 미세하게 증가함을 알 수 있다.

표 14.1 δ^* 와 근사 δ^* 의 비교

σ	k	ρ	δ^*	근사 δ^*
0.05	0.05	0.1	0.1020	0.1019
0.05	0.05	0.5	0.1022	"
0.05	0.05	1.0	0.1024	"
0.05	0.05	2.0	0.1029	"
0.1	0.05	0.1	0.2039	0.2038
0.1	0.05	0.5	0.2043	"
0.1	0.05	1.0	0.2048	"
0.1	0.05	2.0	0.2058	"
0.5	0.05	0.1	1.0195	1.0190
0.5	0.05	0.5	1.0215	"
0.5	0.05	1.0	1.0240	"
0.5	0.05	2.0	1.0289	"
0.05	0.20	0.1	0.0593	0.0588
0.05	0.20	0.5	0.0611	"
0.05	0.20	1.0	0.0632	"
0.05	0.20	2.0	0.0668	"
0.1	0.20	0.1	0.1185	0.1175
0.1	0.20	0.5	0.1223	"
0.1	0.20	1.0	0.1264	"
0.1	0.20	2.0	0.1325	"
0.5	0.20	0.1	0.5926	0.5876
0.5	0.20	0.5	0.6113	"
0.5	0.20	1.0	0.6322	"
0.5	0.20	2.0	0.6675	"

14.4 | 용기 충전공정의 최적 공정평균 및 규격상한 설정

이 절은 14.3.2소절의 재가공하는 경우를 확장한 모형으로, Golhar and Pollock(1988)의 연구 결과를 14.3절의 상황에 맞게 약간 변형한다. 충전공정에서 내용물의 양은 확률적으로 변동하므로 내용물이 너무 많이 들어가면 고정된 가격으로 판매하는 제조자에게 상당한 손실을 초래한다. 이럴 경우에 어떤 특정 상한 기준을 설정하여 이 이상이 되면 내용물을 비우고 재작업하는 것이 보다 경제적일 수 있다.

즉, 규격하한 L 과 더불어 규격상한 U 을 추가로 설정하여 그림 14.13과 같이 내용물의 양 X

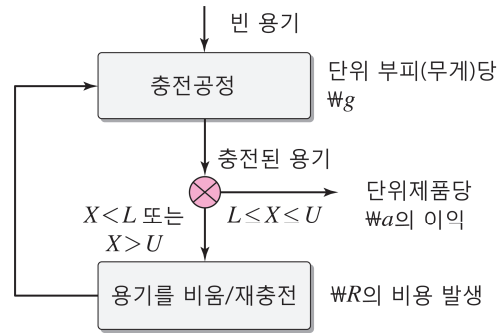


그림 14.13 규격상한을 설정하고 재가공하는 경우

가 $L \leq X \leq U$ 이면 정상 가격으로 판매하며, 이를 벗어나면 내용물을 비우고 재충전 작업을 적용한다.

$U = L + \Delta$ 로 정의한 것 외에 이 모형에 적용되는 비용요소와 기호는 14.3.2소절과 동일하며, 실제 계량된 내용물의 양이 x 일 때 단위제품당 이익함수 P 는

$$P = \begin{cases} a - g(x - L), & L \leq x \leq U \\ E[P] - R, & L < x \text{ 또는 } x > U \end{cases}$$

이 되므로, 공정평균이 $L + \delta$ 일 때 기대이익은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E[P] &= a \int_L^U f(x) dx - g \int_L^U (x - L) f(x) dx + \int_{-\infty}^L (E[P] - R) f(x) dx \\ &\quad + \int_U^{\infty} (E[P] - R) f(x) dx \end{aligned} \tag{14.34}$$

여기서 식 (14.34)의 우변 두 번째 항은 다음과 같이 되므로,

$$\begin{aligned} \int_L^U (x - L) f(x) dx &= \int_{-\delta/\sigma}^{(\Delta - \delta)/\sigma} (\sigma z + \delta) \phi(z) dz \\ &= \sigma(\phi(\delta/\sigma) - \phi((\Delta - \delta)/\sigma)) + \delta(\Phi((\Delta - \delta)/\sigma) - \Phi(-\delta/\sigma)) \end{aligned}$$

식 (14.34)는 식 (14.35)가 된다.

$$\begin{aligned} E[P] &= (E[P] - R)[\Phi(-\delta/\sigma) + (1 - \Phi((\Delta - \delta)/\sigma))] + a(\Phi((\Delta - \delta)/\sigma) - \Phi(-\delta/\sigma)) \\ &\quad - g[\sigma(\phi(\delta/\sigma) - \phi((\Delta - \delta)/\sigma)) + \delta(\Phi((\Delta - \delta)/\sigma) - \Phi(-\delta/\sigma))] \end{aligned} \tag{14.35}$$

따라서 $q = \Pr(X > U) + \Pr(X < L) = 1 - \Phi((\Delta - \delta)/\sigma) + \Phi(-\delta/\sigma)$ 로 두면 기대이익은

다음과 같이 간략한 형태로 나타낼 수 있으며,

$$E[P] = a - g\delta + R - \frac{R + g\sigma(\phi(\delta/\sigma) - \phi((\Delta - \delta)/\sigma))}{1 - q} \quad (14.36)$$

$U = \infty$ (즉, $\Delta = \infty$)이면 식 (14.36)은 전 절의 식 (14.23)이 된다.

Golhar and Pollock(1988)은 해석적으로 식 (14.36)이 δ 와 Δ 에 관해 위로 볼록한 함수임을 보일 수 없지만 여러 조건하에서 그래프를 그려보면 위로 볼록한 함수가 된다고 보고하고 있다.

따라서 $t_1 = \delta/\sigma, t_2 = \Delta/\sigma$ 로 두고 식 (14.36)을 각각 t_1, t_2 에 관해 편미분한 함수를 0으로 둔 연립 비선형 방정식은 다음과 같이 된다(연습문제 14.10 참고).

$$\Phi(t_2 - t_1) - \Phi(-t_1) - t_2\phi(t_1) = 0 \quad (14.37)$$

$$(t_2 - t_1)(\Phi(t_2 - t_1) - \Phi(-t_1)) + (\phi(t_2 - t_1) - \phi(t_1)) - M = 0 \quad (14.38)$$

$$\text{(단, } M = R/(g\sigma)\text{)}$$

이로부터 최적 공정평균과 규격상한 μ^*, U^* 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta^* = t_1^*\sigma, \mu^* = L + \delta^* = L + t_1^*\sigma$$

$$\Delta^* = t_2^*\sigma, U^* = L + \Delta^* = L + t_2^*\sigma$$

즉, 식 (14.37)과 식 (14.38)을 수치적 방법으로 풀어 구한 두 값 t_1^*, t_2^* (단, $t_1^* < t_2^*$)으로부터 최적 공정평균과 규격상한을 설정할 수 있다. 한편 Golhar and Pollock(1988)은 M 이 0.1~2일 때 다음의 근사식을 제공하고 있다.

$$t_1^* = \frac{\delta^*}{\sigma} \approx 0.746 \sqrt{M} \quad (14.39)$$

$$t_2^* = \frac{\Delta^*}{\sigma} \approx t_1^* + (0.441 + 0.696M^{1/4})^4 \quad (14.40)$$

한편 이상적 충전공정에서는 σ 가 0이 되어 항상 정확하게 L 만큼 충전할 수 있다면 단위제품당 이익은 항상 a 가 되므로 다음과 같이 이상적 충전공정에 대한 단위제품당 기대 초과비용(손실)의 최솟값 EC_0 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$EC_0 = a - E[P | t_1^*, t_2^*] \quad (14.41)$$

또한 공정평균과 더불어 규격상한을 설정할 경우의 이익 EP_1 을 다음과 같이 구하여, 공정평균과 규격상한을 동시에 관리하는 복잡성에 대한 상대적 이점을 평가하여 이익의 타당성을 검토할 수 있을 것이다.

$$EP_1 = E[P | t_1^*, t_2^*] - E[P | \delta^*] \quad (14.42)$$

여기서 $E[P | \delta^*]$ 은 식 (14.24)로부터 구한 δ^* 을 $\Delta = \infty$ 일 때의 식 (14.36)에 대입한 기대이익이 된다.

일반적으로 M 이 증가하면 식 (14.40)에 의해 U^* 가 증가하므로 M 이 작을수록($g\sigma$ 가 R 에 비해 상대적으로 클수록) 규격상한을 설정하는 효과가 커질 것으로 예상된다.

예제 14.6 예제 14.4와 동일한 여건에 적용하여 기대이익을 최대화하는 공정평균과 규격상한을 설정하라.

$M = 3,000 / (5,000 \cdot 0.4) = 1.5$ 이므로 식 (14.37)과 (14.38)을 수치해법으로 풀면 $t_1^* = 0.914$, $t_2^* = 3.058$ (근사적 방법인 식 (14.39)와 식 (14.40)으로부터 구하면 $t_1^* \approx 0.914, t_2^* \approx 3.066$)이 되어 공정평균과 규격상한은 다음과 같이 설정된다.

$$\begin{aligned} \delta^* &= 0.914 \cdot 0.4 = 0.366, \quad \mu^* = L + \delta^* = 3 + 0.366 = 3.366 \\ \Delta^* &= 3.058 \cdot 0.4 = 1.223, \quad U^* = 3 + 1.223 = 4.223 \end{aligned}$$

이로부터 단위제품당 기대이익을 구하면 식 (14.36)으로부터 2,885원이 된다. 그리고 그림 14.14를 보면 기대이익 함수가 위로 볼록하여 최댓값이 유일하게 존재함을 알 수 있다. 한편 예제 14.4와 비교하면 규격상한을 설정한 효과는 단위제품당 15원이 되며, 참고적으로 이상적 공정에 대비한 단위제품당 기대손실은 $6,000 - 2,885 = 3,115$ 원이 된다.

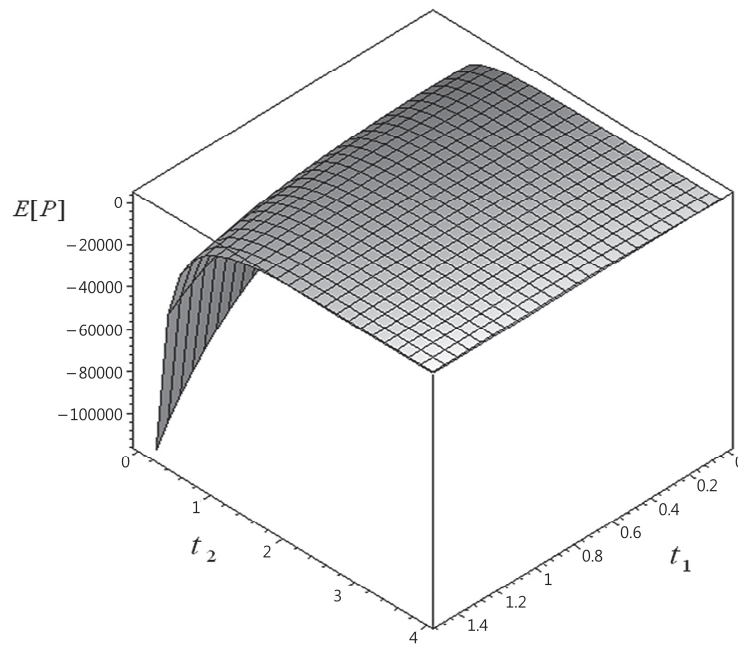


그림 14.14 기대이익 함수 형태: 예제 14.6

14.5 | 실량표시 상품의 공정평균 설정과 검사계획

전 절까지는 목적함수를 단위제품당 기대비용 또는 기대이익으로 삼았으므로, 해(공정평균)를 구하기 위해서는 수치해법이 요구되는 모형이 대부분이었다. 이 절에서는 전 절들과 달리 비용이나 이익을 고려하지 않고, 통계적 기준하에서 식품산업 등에서 제조되는 실량표시 상품을 대상으로 삼고자 한다.

실량표시 상품은 다음의 두 가지 요건(평균요건과 개별요건)을 통과해야 하며, 나라마다 이런 두 요건을 약간 변형하거나 추가된 요건을 적용하기도 한다.

(1) 평균요건

먼저 표본으로부터 구한 평균 실량이 최소 기준에 해당되는 실량표시량(Label Stated Quantity: LSQ) 이상이어야 한다.

(2) 개별요건

랜덤하게 추출된 일정한 크기의 표본에서 최대 허용오차(Maximum Allowable Variation: MAV)로부터 계산된 실량기준(즉, LSQ-MAV)에 미달하는 제품이 일정 개수 이하여야 한다. 여기서 개별요건을 다음 소절의 OIML 검사계획처럼 두 요건으로 세분하여 규정하기도 한다.

실량표시 상품의 제조공정의 단위제품당 실량 X 가 알려진 표준편차를 가지는 정규분포를 따를 때 상기의 두 요건을 만족하는 공정평균의 설정문제를 다음의 비교적 단순화한 예제로서 예시해보자. 그리고 현업에서 활용되는 구체적인 요건과 활용법은 다음 소절에서 살펴본다.

예제 14.7 캔의 LSQ는 500g이고 MAV가 15g이며, 표본크기는 10개, 공정 표준편차는 30g이다.

(1) 평균요건

\bar{X} 가 10개 표본의 평균이면 다음 조건을 충족해야 하나,

$$\Pr(\bar{X} \geq LSQ) = 1 \quad (14.43)$$

역시 이를 충족하도록 하려면 공정평균을 ∞ 로 설정해야 하므로, 식 (14.43)의 우변 값을 낮추어야 한다. 이 값을 0.9 이상으로 설정하면 최대 0.1의 확률로 평균요건을 충족시키지 못할 위험(생산자 위험)이 발생한다.

$$\Pr(\bar{X} \geq LSQ = 500) = \Pr\left(Z \geq \frac{500 - \mu}{30/\sqrt{10}}\right) \geq 0.9$$

따라서 μ 는 다음 조건을 만족해야 하므로,

$$\frac{500 - \mu}{30/\sqrt{10}} \leq -1.28 \Rightarrow \mu \geq 500 + 1.28 \frac{30}{\sqrt{10}} = 512.1$$

이로부터 μ 는 최소 512.1g 이상이어야 한다.

(2) 개별요건

10개 표본 중에서 LSQ-MAV(485g)에 미달될 확률이 p 일 때 이에 미달되는 캔의 개수는 이항분포를 따른다. 즉, 다음을 만족해야 되나,

$$\binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = 1 \quad (14.44)$$

역시 이를 충족하도록 하려면 역시 공정평균을 ∞ 로 설정해야 하므로, 식 (14.44)의 우변 값을 낮추어야 한다. 즉, 평균요건과 같이 0.9 이상으로 설정하면 최대 0.1의 확률로 개별요건을 충족하지 못할 위험(생산자 위험)하에서 p 는 0.01 이하가 되어야 한다.

$$\binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} \geq 0.9 \Rightarrow p \leq 0.01$$

따라서 다음 조건이 성립해야 하므로,

$$p = \Pr(X < LSQ - MAV = 485) = \Pr\left(Z < \frac{485 - \mu}{30}\right) \leq 0.01$$

이로부터 μ 는 최소 554.9g 이상이어야 한다.

$$\frac{485 - \mu}{30} \leq -2.33 \Rightarrow \mu \geq 554.9$$

따라서 상기의 두 요건을 모두 충족하는 공정평균은 최소 554.9g 이상이 되어야 한다.

14.5.1 실량표시 상품의 검사계획

국제 표준규격에서 쓰이는 실량표시 상품의 요건을 살펴보자. 제품의 공칭 표시량을 Q , 실량 (X)의 평균과 표준편차를 각각 μ , σ , 검사로트의 크기와 이로부터 랜덤하게 추출한 표본크기를 각각 N 과 n , 표본의 단위별 실량을 X_1, X_2, \dots, X_n , 이들의 평균을 \bar{X} 라 할 때 평균요건 R1은 다음과 같이 나타낼 수 있으며, a 를 SEL(Sample Error Limit; 표본오차한계)라고 부른다. 따라서 $Q - a$ 가 전 소절의 LSQ에 해당된다.

$$R1: \bar{X} \geq Q - a$$

그리고 개별요건은 두 종의 오차 허용량에 대한 부적합개수 요건인 R2와 R3으로 구별하여 다음과 같이 명시된다.

$$R2: Q - h_1 \text{ 미만인 제품 수가 } m \text{ 이하}$$

$$R3: Q - h_2 \text{ 미만인 제품은 하나도 없음}$$

여기서 실제적인 R2 요건은 R3 요건을 고려하면 $Q - h_2$ 이상이고 $Q - h_1$ 미만인 제품 수가 m 개 이하인 조건이 된다.

EU와 우리나라에서 채택하고 있는 OIML R87은 R1, R2, R3 요건을 모두 충족해야 하며, R1 요건에서 실제 모평균이 Q 일 때 표본에 의한 합격확률이 0.995가 되도록 a 를 설정한다. 그리고 R2와 R3에서 $h_1 = \Delta, h_2 = 2\Delta$ (Δ 를 허용 부족량(tolerable deficiency)로 칭하며, 전 소절에서 SEL를 기준으로 차감하는 MAV와는 달리 설정되고 있음)로 두고 있다. 미국의 NIST handbook 133은 예제 14.7처럼 R1과 R2 요건만 부과하고 a 를 합격확률이 0.975가 되도록 정하며, 호주와 뉴질랜드에서는 와인과 같은 병입된 액체물에 대한 실량요건으로 $a = 0$ (즉, Q 가 SEL에 해당)인 R1과 더불어 R3 요건만 규정하고 있다(서순근, 2015).

14.5.2 OIML 검사계획

1955년 법적계량에 관한 국제적인 통일을 위해 설립된 OIML에 우리나라는 1978년에 정회원국으로 가입하였으며, 현재 정회원국 60개국, 준회원국 67개국이 가입되어 있다.

OIML R87는 실량이 정규분포를 따를 경우에 요건 R1, R2, R3으로부터 다음과 같은 절차로 n, a, m, Δ 를 설정하는 샘플링 검사계획을 설정하고 있다.

즉, 평균요건의 n, a 는 $b = 0.74$ 일 때 다음의 두 조건을 만족하도록 설정된다고 기술하고 있다.

$$\Pr(\bar{X} \geq Q - a \mid \mu = Q) \geq 0.995 \quad (14.45)$$

$$\Pr(\bar{X} \geq Q - a \mid \mu = Q - b\sigma) \leq 0.1 \quad (14.46)$$

식 (14.45)에서 a 를 다음과 같이 설정하며 이의 계수를 SCF(Sample Correction Factor; 시료 보정인자)로 부르는데, SCF와 n 이 로트크기 N 의 범위에 따라 표 14.2(KS A 50087의 표 1)에 주어져 있다.

$$a = \frac{t_{(n-1, 0.005)} \cdot s}{\sqrt{n}} = SCF \cdot s \quad (14.47)$$

(단, $t_{(\nu, \alpha)}$ 는 자유도가 ν 인 t분포의 $(1 - \alpha)$ 분위수이고,

s 는 표본 표준편차임.)

표 14.2 OIML R87(KS A 50087)의 검사계획

N	n	SCF	m
100 ~ 500	50	0.379	3
501 ~ 3,200	80	0.295	5
> 3,200	125	0.234	7

표 14.3 OIML R87(KS A 50087)의 검사계획: 개별요건의 Δ

1. 실량 또는 부피 상품(Q ; g, ml)	허용 부족량(Δ)	
	Q 의 백분율(%)로 표시	g 또는 ml 표시
0 이하 ~ 50	9	-
50 초과 ~ 100 이하	-	4.5
100 ~ 200	4.5	-
200 ~ 300	-	9
300 ~ 500	3	-
500 ~ 1,000	-	15
1,000 ~ 10,000	1.5	-
10,000 ~ 15,000	-	150
15,000 ~ 30,000	1	-
2. 길이 상품(Q)	허용 부족량(Δ)	
$Q \leq 5m$	허용하지 않음	
$Q > 5m$	Q 의 2%	
3. 면적 상품(Q)	허용 부족량(Δ)	
모든 Q	Q 의 3%	
4. 개수 상품(Q)	허용 부족량(Δ)	
$Q \leq 50$	허용하지 않음	
$Q < 50$	Q 의 1%를 반올림한 값	

여기서 대상 모집단이 유한 모집단이지만 $N \gg n$ 인 경우가 주 대상이 되므로 확률분포로 초기하분포보다 이항분포를 적용하는 것이 편리하다.

또한 개별요건의 m 과 Δ 는 D_1, D_2 가 각각 R2와 R3 요건의 부적합 개수(즉, $h_1 = \Delta, h_2 = 2\Delta$)라 할 때 생산자 위험률(α)과 소비자 위험률(β)이 각각 0.05와 0.1 이하가 되도록 식 (14.48)과 (14.49)의 조건하에서 설정되었다고 기술되어 있으며, m 과 Δ 은 각각 KS A 50087의 표 1와 2에 해당되는 표 14.2와 14.3에 수록되어 있다.

$$\Pr(D_1 \leq m, D_2 = 0 \mid p \leq 0.025) \geq 0.95 \quad (14.48)$$

$$\Pr(D_1 \leq m, D_2 = 0 \mid p \geq 0.09) \leq 0.10 \quad (14.49)$$

여기서 두 식의 p 는 실량이 공칭 표시량에 비해 Δ 보다 더 적은 검사로트의 부적합률이다. 만약 식 (14.45)와 (14.48), 식 (14.46)과 (14.49)가 독립이라 가정하면 생산자 위험률은 $1 - 0.995 \times 0.95$ 인 5.475% 이하, 소비자 위험률은 0.1^2 인 1% 이하가 되므로, 특히 소비자 위

험은 전통적인 샘플링 검사계획과 달리 상당히 작은 위험률로 설정되고 있다고 볼 수 있다.

예제 14.8 어떤 냉동식품의 포장 단위당 표시 실량은 1,000g으로 검사로트의 크기는 500이다. 검사계획을 구하라.

KS A 50087인 표 14.2와 표 14.3에 따르면 $n = 50, m = 3, SCF = 0.397, \Delta = 15\text{g}$ 의 샘플링 검사계획이 요구된다. 즉, 50개를 랜덤 추출하여 구한 단위 중량의 평균이 $1,000 - 0.397s$ (s 는 표본 표준편차임) 이상이고, 50개 중에서 985g 미만인 제품이 3개 이하, 970g 미만인 제품이 한 개도 없어야 이 로트는 합격된다.

14.6 | 추세 공정의 생산주기 설정*

실제 공정에서 시간이 경과됨에 따라 공정평균이 체계적인 이동 추세를 보이는 경우가 많이 존재한다. 이런 추세를 보이는 전형적인 경우로 기계가공 작업에서 공구 마모, 포신의 마모, 지속적인 비료 공급에 따른 곡물 산출량의 하락, 화학물질의 농도가 약해짐에 따라 반응속도가 떨어지는 경우 등 여러 가지를 들 수 있다. 이런 추세는 비선형이 보다 적절한 모형일 수 있으나 여기서는 선형인 경우로 한정한다.

따라서 이럴 경우에 규격을 벗어나는 제품이 생산되므로 적절한 주기마다 공정을 새로 설정(setup)해야 하는데, 여기에는 상당한 비용이 발생한다. 따라서 공정을 새로 설정하는 비용과 부적합품에 따른 손실을 고려하여 이를 최소화하는 생산주기 등을 설정할 필요가 있다(Gibra, 1974).

14.6.1 한쪽 규격만 주어질 경우

공정 추세는 다음과 같이 평균이 선형함수를 따른다고 가정하는데, $\theta > 0$ 로 한정해도 모형의 일반성을 해치지 않는다. 또한 표준편차는 σ 로 불변이며, t 시점의 생산제품 품질특성치의 확률 밀도함수와 누적분포함수는 $f_t(\cdot), F_t(\cdot)$ 로 나타낸다.

$$\mu_t = \mu_0 + \theta t \quad (14.50)$$

규격상한(U)만 있다고 할 경우에 $U = \mu_0 + \Delta$ 로 나타내며, τ 는 생산주기, m 은 단위시간당 생산제품의 개수, c_s 는 공정 설정비용, \bar{n} 는 단위시간당 양품의 평균 개수, c_d 는 개별 부적합품으로 초래된 손실이라고 정의하자.

먼저 \bar{n} 는 단위시간당 생산된 양품의 평균 개수이므로,

$$\bar{n} = \frac{m}{\tau} \int_0^\tau F_t(U | \mu_t) dt \quad (14.51)$$

$$\text{(여기서, } F_t(U | \mu_t) = \int_0^U f(x | \mu = \mu_0 + \theta t) dx \text{)}$$

가 되며, 이로부터 생산주기당 기대 총비용은 다음과 같이 표현된다.

$$E[TC] = c_s + c_d \tau (m - \bar{n})$$

따라서 목적함수를 생산주기당 기대 총비용을 τ 동안 생산된 양품의 수로 나눈 양품당 기대비용으로 설정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C(\tau) = \frac{E[TC]}{\bar{n}\tau} = \frac{c_s + c_d \tau (m - \bar{n})}{\bar{n}\tau} = \frac{c_s}{\bar{n}\tau} + \frac{c_d (m - \bar{n})}{\bar{n}} \quad (14.52)$$

최적 생산주기를 구하기 위해 식 (14.52)를 τ 에 대해 미분하여 0으로 둔 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = -\frac{c_s}{\bar{n}\tau^2} - \frac{c_s}{\bar{n}^2} \frac{d\bar{n}}{\tau} + \frac{c_d [-\bar{n} - (m - \bar{n})]}{\bar{n}^2} \frac{d\bar{n}}{d\tau} = 0$$

상기 식은 다음과 같이 정리되므로,

$$\bar{n}c_s + (c_s\tau + c_d m \tau^2) \frac{d\bar{n}}{d\tau} = 0$$

$\frac{d\bar{n}}{d\tau} = \frac{mF_\tau(U | \mu_\tau) - \bar{n}}{\tau}$ 를 대입하면 최적 $\tau(\tau^*)$ 는 비선형 방정(14.53a) 또는 이에 (14.51)을 대입한 방정(14.53b)의 해로부터 구할 수 있다.

$$-c_d \bar{n} \tau^* + F_\tau(U | \mu_\tau^*) (c_s + c_d m \tau^*) = 0 \quad (14.53a)$$

$$\frac{\int_0^{\tau^*} F_t(U | \mu_t) dt}{F_\tau(U | \mu_\tau^*)} = \tau^* + \frac{c_s}{c_d m} \quad (14.53b)$$

여기서 최적 $\tau(\tau^*)$ 에 관한 충분조건의 충족여부를 해석적으로 파악하기는 쉽지 않으므로, $C(\tau)$ 의 형태를 통해 이를 확인할 수 있다(예제 14.10 참고).

예제 14.9 품질특성치는 $\mu_t = 2 + 0.01t$ 인 다음과 같은 균일분포를 따른다.

$$f(x) = 10, \quad \mu_t - 0.05 < x < \mu_t + 0.05$$

이 경우 최초 설정된 공정평균은 2가 된다. 규격상한은 $2+0.08$, 시간당 50단위를 생산하며 c_s 는 340,000원, c_d 는 1,000원일 때 최적 생산주기를 구하라.

식 (14.53b)에서 좌변의 두 항은

$$\int_0^\tau F_t(2.08 | \mu_t) dt = 3.0 + \int_{3.0}^\tau \int_{1.95+0.01t}^{2.08} 10 dx dt = 1.3\tau - 0.05\tau^2 - 0.45$$

$$F_\tau(2.08 | \mu_\tau) = \int_{1.95+0.01\tau}^{2.08} 10 dx = 1.3 - 0.1\tau$$

가 되므로, 다음 식으로부터 구한 τ^* 는 8.43(hr)가 되며,

$$\frac{1.3\tau^* - 0.05\tau^{*2} - 0.45}{1.3 - 0.1\tau^*} = \tau^* + 6.8 \Rightarrow 0.05\tau^{*2} + 0.68\tau^* - 9.29 = 0$$

이때의 \bar{n} (식 (14.51))와 양품당 최소 기대비용(식 (14.52))은 각각 41.25단위, 2,015.1원이 된다.

한편 부적합품이 하나도 발생하지 않는 최장 시점은 $2 + 0.01t + 0.05 = 2.08$ 로부터 3.0(hr)이 되며, 이를 생산주기로 설정하면 식 (14.52)로부터 2,266.7원이 되어 더 큰 비용이 발생한다.

예제 14.10 품질특성치가 표준편차가 0.018이고 $\mu_t = 2 + 0.01t$ 인 정규분포를 따르고 최초 공정평균은 2로 설정되며, 규격상한은 $2+0.072$ 이다. 시간당 150단위를 생산하며 c_s 는 270,000원, c_d 는 400원일 때 최적 생산주기를 구하라.

식 (14.53b)에서 좌변의 두 항은

$$\int_0^\tau F_t(2.072 | \mu_t) dt = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{(0.072 - 0.01t)/0.018} \phi(x) dx dt = \int_0^\tau \Phi\left(\frac{0.072 - 0.01t}{0.018}\right) dt$$

$$F_\tau(2.072 | \mu_\tau) = \int_{-\infty}^{(0.072 - 0.01\tau)/0.018} \phi(x) dx = \Phi\left(\frac{0.072 - 0.01\tau}{0.018}\right)$$

가 되므로, 다음 식을 만족하는 τ^* 을 수치해법으로 풀면 14.95(hr)가 된다.

$$\frac{\int_0^{\tau^*} \Phi\left(\frac{0.072 - 0.01t}{0.018}\right) dt}{\Phi\left(\frac{0.072 - 0.01\tau^*}{0.018}\right)} = \tau^* + 4.5$$

그림 14.15를 보면 그 값이 유일하게 존재함을 알 수 있고 이때의 \bar{n} 는 식 (14.51)로부터 137.0단위, 양품당 최소 기대비용은 식 (14.52)로부터 321.3원이 된다.

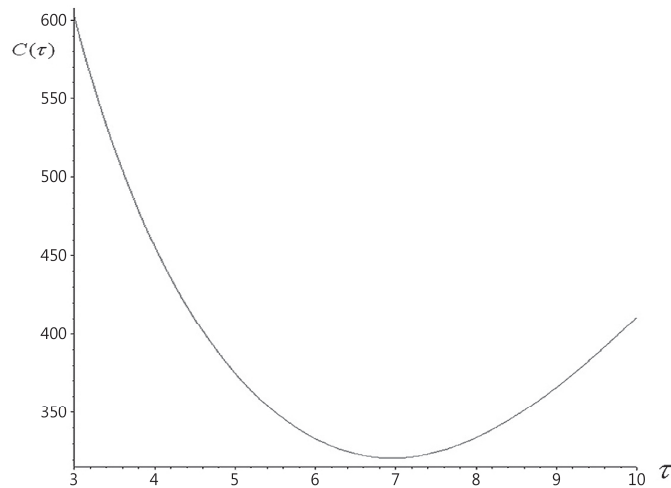


그림 14.15 기대비용 함수 형태: 예제 14.10

14.6.2 양쪽 규격이 주어질 경우: 생산주기와 공정평균의 설정

규격상한(U)과 규격하한(L)이 $\mu_0 \pm s\sigma$ 이고 공정평균을 μ_0 이외의 값에서 설정하는 경우를 고려하자. 예를 들면 식 (14.50)의 θ 가 양수이면 μ_0 보다 작은 값에서 공정평균을 설정하면 보다 긴 생산주기를 가질 수 있다. 품질특성치가 정규분포를 따를 때 그림 14.16과 같이 L 과 설정된

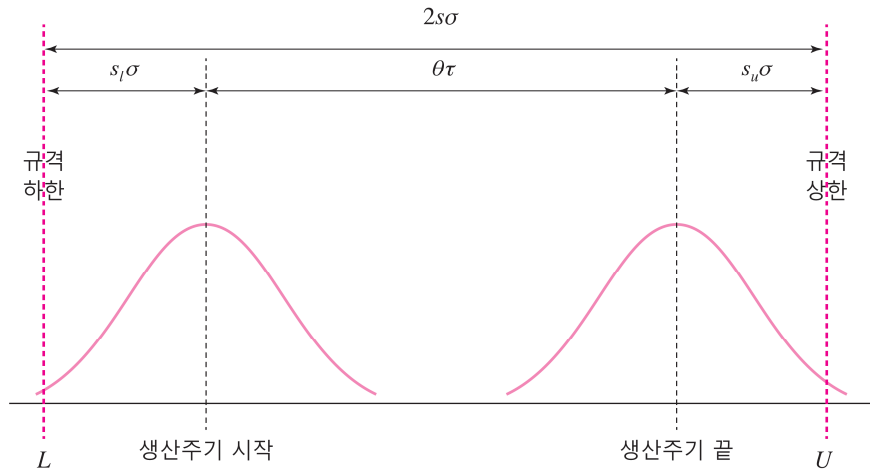


그림 14.16 양쪽 규격이 주어진 경우

최초 평균과의 간격, 그리고 마지막 평균과 U 와의 간격을 각각 $s_l\sigma$ 와 $s_u\sigma$ 로 나타내자.

생산주기 τ 동안 공정평균은 최초 $\mu_0 - (s - s_l)\sigma$ 에서 시작하여 t 시점에서 $\mu_0 - (s - s_l)\sigma + \theta t$, $0 < t \leq \tau$ 가 되므로, 생산된 단위시간당 양품의 개수 \bar{n} 는 규격 내($\mu_0 \pm s\sigma$)에 포함될 확률로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{n} = \frac{m}{\tau} \left[\int_0^\tau \Phi\left(2s - s_l - \frac{\theta t}{\sigma}\right) dt - \int_0^\tau \Phi\left(-s_l - \frac{\theta t}{\sigma}\right) dt \right] \quad (14.54)$$

식 (14.54)를 s_l 에 대해 미분하여 0으로 둔 다음 방정식으로부터 s_l 를 구하여 \bar{n} 를 최대화하는 최초 설정 공정평균을 구할 수 있다.

$$\frac{d\bar{n}}{ds_l} = -\frac{m}{\tau} \left[\int_0^\tau \phi\left(2s - s_l - \frac{\theta t}{\sigma}\right) dt - \int_0^\tau \phi\left(-s_l - \frac{\theta t}{\sigma}\right) dt \right] = 0 \quad (14.55)$$

식 (14.55)에서 변수변환($z = 2s - s_l - (\theta t/\sigma)$ 등)을 적용하면

$$\int_{2s - s_l - (\theta\tau/\sigma)}^{2s - s_l} \phi(z) dz = \int_{s_l}^{s_l + (\theta\tau/\sigma)} \phi(z) dz$$

이 되므로, τ 와 s_l 은 다음의 관계가 성립해야 한다.

$$2s - s_l = s_l + \frac{\theta\tau}{\sigma} \Rightarrow \tau = \frac{2(s - s_l)\sigma}{\theta} \quad (14.56)$$

즉, 식 (14.56)의 τ 를 그림 14.16의 관계인 $s_l\sigma + \theta\tau + s_u\sigma = 2s\sigma$ 에 대입하면 s_u 는 s_l 과 같아진다.

한편 한쪽 규격과 유사한 방법(식 (14.52)와 (14.53a) 참고)으로 전개하여 식 (14.53b)에 적용하면 최적 생산주기는

$$\frac{\int_0^\tau \Phi\left(2s - s_l - \frac{\theta t}{\sigma}\right) dt - \int_0^\tau \Phi\left(-s_l - \frac{\theta t}{\sigma}\right) dt}{\Phi\left(2s - s_l - \frac{\theta\tau}{\sigma}\right) - \Phi\left(-s_l - \frac{\theta\tau}{\sigma}\right)} = \tau + \frac{c_s}{c_d m}$$

을 만족하므로, 식 (14.56)을 상기 방정식에 대입하면 다음과 같이 된다(연습문제 14.17 참고).

$$\frac{\int_{s_l}^{2s-s_l} \Phi(z) dz - \int_{s_l-2s}^{-s_l} \Phi(z) dz}{\Phi(s_l) - \Phi(s_l-2s)} = \frac{c_s \theta}{c_d m \sigma} + 2s - 2s_l \quad (14.57)$$

따라서 식 (14.57)를 만족하는 최초 설정 공정평균을 설정하는 데 필요한 s_l^* 를 구한 후에 식 (14.56)에서 최적 생산주기 τ^* 를 구하면 된다.

예제 14.11 품질특성치가 표준편차가 0.018이고 $\mu_t = 2 + 0.01t$ 인 정규분포를 따르며, μ_0 는 규격 중앙인 2, 규격은 2 ± 0.072 이다. 시간당 150단위를 생산하며 c_s 는 270,000원, c_d 는 400원일 때 최초 설정 공정평균과 생산주기를 구하라.

$s = 0.072/0.018 = 4$ 이므로 식 (14.57)로부터 s_l^* 를 구하면 0.511이 되므로 최초 설정 공정평균은 $\mu_0 - s\sigma + s_l\sigma = 2.0 - (4 - 0.511) \times 0.018 = 1.937$ 이 되며, 따라서 식 (14.56)으로부터 최적 생산주기는 $\tau^* = 2(4 - 0.511)(0.018)/0.01 = 12.56(\text{hr})$ 이 된다. 이 값들을 식 (14.54)에 대입하면 최적 \bar{n} 는 141.6개가 된다. 그리고 그림 14.17을 보면 양품당 기대비용인 $C(\tau, s_l)$ 은 아래로 볼록한 함수가 되며, 두 값에서 최소 양품당 기대비용은 식 (14.52)로부터 175.4원이 된다.

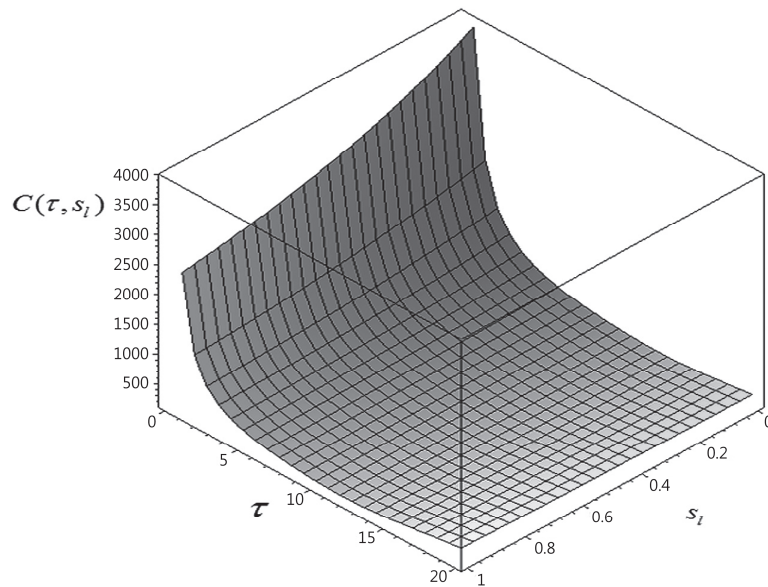


그림 14.17 기대비용 함수 형태: 예제 14.11

14.6.3 회귀관리도를 이용한 방법

공구나 금형 등의 마모로 인해 가공부품 외경 등의 가공물의 품질특성이 점진적으로 증가하거나 감소하는 추세를 따를 때 전 소절의 수리모형보다 간편한 6장과 7장에서 다룬 관리도가 유용하게 활용될 수 있다.

이런 품질특성에 관한 관리도의 중심선은 수평인 6장의 \bar{X} 관리도와 달리 수평보다는 상향 또는 하향 경사를 가지며, 표본 평균에 관한 관리한계도 중심선과 평행한 형태가 되는데(그림 14.18), 이런 관리도를 회귀관리도(regression control chart)라 부른다(Mandel, 1969). 이와 같은 여건하에서 공정평균의 허용 가능한 최초 및 최종 값은 상·하한규격에 의해 결정될 수 있다. 즉, 보통 규격에 따른 공차는 공정평균의 허용범위보다 큰 값을 가지는 경우가 해당하므로, 상당한 기간 공정평균의 상향 또는 하향 이동을 허용하는 상황에 속하며, 특히 공정 조정비용이 높을 때 유용하다.

상기와 같은 이동현상을 반영한 중심선은 식 (14.50)의 $CL = \mu_0 + \theta i$ (i 는 부분군(표본) 번호)의 직선형태가 되며, 크기 n 의 부분군 k 개로 구성된 데이터를 대상으로 단계 I의 경우에 절편과 기울기 추정치인 a_0 와 a_1 (즉, $\hat{\mu}_0$ 와 $\hat{\theta}$)는 최소제곱법(식 (14.58))에 의해 다음과 같이 추정된다.

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})[i - (k+1)/2]}{\sum_{i=1}^k [i - (k+1)/2]^2}, \quad a_0 = \bar{\bar{x}} - a_1(k+1)/2, \quad (14.58)$$

(여기서, \bar{x}_i 는 부분군 i 의 평균, $\bar{\bar{x}}$ 은 전 평균임.)

단계 I(해석용)에서 회귀관리도의 $i(i = 1, 2, \dots, k)$ 번째 부분군에 대한 두 관리한계는 그림 14.18처럼 다음과 같이 설정된다(6장 참고).

$$UCL = (a_0 + A_2\bar{R}) + a_1i \quad (14.59)$$

$$LCL = (a_0 - A_2\bar{R}) + a_1i$$

따라서 대상 장비의 생산된 모든 제품이 규격 내에 포함되기 위해서는 장비의 최초 설정을 어떻게 정해야 하는가, 이에 따라 언제 교정이나 교체를 언제 할 것인가 하는 생산주기를 결정할 수 있다. 일례로 a_0 가 규격의 중앙 근방이면 중심선의 시점과 종점을 두 규격한계로부터 3σ 의 간격을 가지도록 설정할 수 있다. 즉, 공구 마모가 증가하여 품질특성치가 증가할 경우(즉, $a_1 > 0$) 전술한 방식을 적용하여 공구 교체주기(즉, 생산주기)를 정한다면, 정규분포를 따른다고 가정할 때 규격을 벗어날 확률은 0.135% 정도가 된다. 만약 a_0 가 규격의 중앙 근방이 아니면서 이의 조정(즉, 최초 공정평균의 변경)이 용이하지 않으면 a_0 부터 시작하여 a_1 의 부호를 고려한 규격으로부터 3σ 의 간격의 종점을 설정하여 이 기준으로 교체주기를 정할 수 있다(예제 14.12 참고).

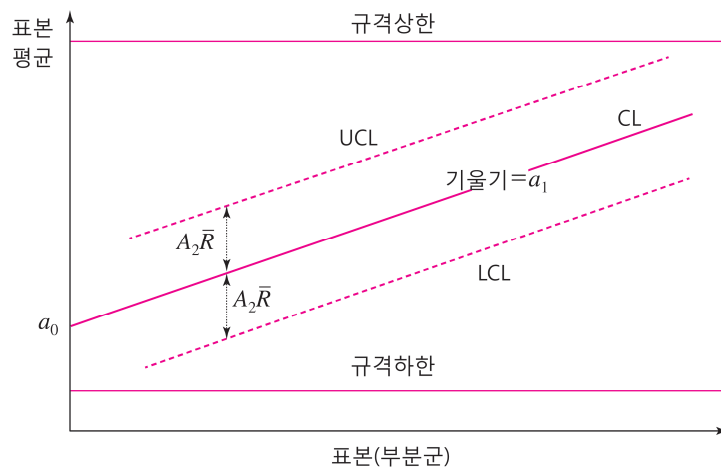


그림 14.18 회귀관리도

예제 14.12 공작기계에 의해 가공되는 기계부품의 외경은 공구 마모에 따라 점진적으로 증가한다. 공구의 교체주기를 정하기 위해 크기 4의 부분군 25개를 추출하여 평균과 범위를 구한 결과가 표 14.4에 정리되어 있다. 규격하한과 상한은 각각 4.40와 13.26mm이다. 회귀관리도를 작성하여 공구의 교체시점을 설정하라. 단, 이 공정에서 최초 공정평균의 변형은 용이하지 않다.

표 14.4로부터 계산된 $\bar{\bar{x}} = 8.671$, $\bar{R} = 2.37$, $a_1 = 295.18/1,300 = 0.2271$, $a_0 = 8.671 - 0.2271(13) = 5.719$ 로부터 i 번째 부분군에 관해 $CL = 5.719 + 0.2271i$ 이 된다. 관리한계는 부록 C.5로부터 A_2 가 0.7285이므로 식 (14.59)로부터 다음과 같이 설정된다.

$$UCL = (5.719 + 0.7285 \cdot 2.37) + 0.2271i = 7.446 + 0.2271i$$

$$LCL = (5.719 - 0.7285 \cdot 2.37) + 0.2271i = 3.992 + 0.2271i$$

각 부분군의 통계량 값을 타점한 회귀관리도인 그림 14.19를 보면 모든 점들이 관리한계 내에 존재하므로 단계 II(관리용)로 이행가능한 상태가 된다. 그리고 공정 표준편차의 추정치는 $\bar{R}/d_2 = 2.37/2.059 = 1.151$ 이고, 규격 중앙(8.83)이 a_0 와 차이가 있는 상황이므로, a_1 이 양수인 점을 고려하면 중심선이 도달할 수 있는 허용 가능한 최댓값으로 규격상한에 대한 3σ 의 간격을 적용하면, 종점의 중심선의 해당값은 $13.26 - 3 \cdot 1.151 = 9.807$ 이 된다. 따라서 중심선이 a_0 로부터 시작하여 이 위치에 도달할 때 공구를 교체한다면 교체주기는 $(9.807 - 5.719)/0.2271 = 18$ (\times 부분군 추출 간격) 정도로 예상된다.

표 14.4 기계부품 외경 데이터

표본	\bar{x}	R	표본	\bar{x}	R
1	4.84	1.60	14	8.36	1.76
2	6.08	2.36	15	8.50	2.56
3	5.32	1.24	16	9.84	2.90
4	6.70	2.86	17	9.68	2.40
5	7.22	3.24	18	10.36	2.08
6	6.94	1.90	19	10.44	2.70
7	8.68	2.04	20	9.88	1.88
8	6.66	2.40	21	10.94	3.32
9	9.06	2.78	22	10.24	2.44
10	8.12	1.56	23	10.02	2.10
11	7.68	2.26	24	10.50	2.52
12	9.50	3.02	25	11.52	2.94
13	9.70	2.34			

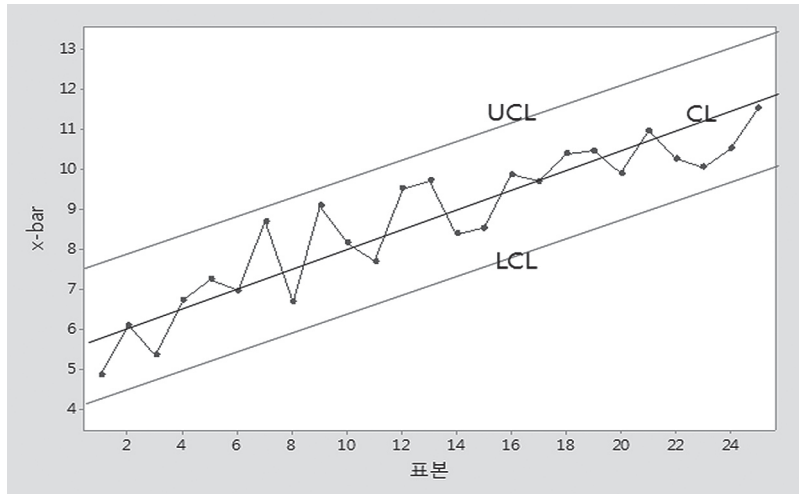


그림 14.19 회귀관리도: 기계부품 외경 데이터

14.7 | 공정 설정 제어: 조화 조정 규칙*

공정의 산포를 줄여 공정을 개선하고, 이로부터 공정평균을 설정한 후의 다음 단계는 실제 평균이 목표치에 근접하도록 조정하는 작업이 필요하다. 장비의 최초 설정을 목표치로 정확하게 작업할 수 없는 경우 시간이 경과함에 따라 목표치를 벗어나는 제품이 생산될 가능성이 높아지므로, 공정 운영자는 보통 일정한 간격으로 품질특성치를 측정하여 장비를 조정하게 된다. 이때 획득한 관측값에는 공정의 고유변동과 측정오차가 포함되어 있으므로 이런 조정작업의 최적화는 수월하지 않다.

이 절에서는 7장의 EPC와 유사하게 조정을 적용하지만 다른 상황을 다룬다. 즉, 기계 가공 시에 목표치를 벗어난(off-target) 장비의 최초 설정을 순차적으로 조정하는 절차(setup adjustment method)인 Grubbs(1954)의 조화 조정 규칙(harmonic adjustment rule)을 소개하고 이의 최적성을 확인하고자 한다(Chandra, 2001).

이런 상황에 실제 적용 가능한 조정 방식으로 관측값(y_i)과 목표치(T)와의 차($y_i - T$)를 적절하게 입력변수에 반영하는 방식이 있는데, 관측값에는 공정의 고유변동과 측정오차가 포함되어 있어 이런 편차를 모두 반영하게 되면 오버슈팅(overshooting)이 될 수 있으며, 또한 적용된

시간 순에 따라 자기상관관계가 발생하므로 일률적으로 같은 정도의 보정을 적용하는 것은 바람직하지 않다. Grubbs는 이런 점을 고려하여 i 번째 조정 시에 평균에 대해 $k_i(Y_i - T)$, $0 \leq k_i \leq 1$ 의 형태로 보정하는 방식 중에서 최적인 경우를 찾았는데, 여기서는 이를 자세하게 살펴보자.

14.7.1 최적 조정 절차의 정식화

Grubbs(1954)는 다음과 같은 조정절차를 제시하였다.

- ① 작업자는 하나의 아이টে임을 측정하고(Y_i) 이를 목표치와 비교하여 평균에 대해 $k_i(Y_i - T)$, $0 \leq k_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$ 의 형태로 보정한다.
- ② 이후에 다시 하나의 아이টে임을 측정하며, 필요하면 조정한다.
- ③ 이런 단계를 수행하면서 여러 연속적인 아이টে임에서 조정할 필요가 없거나 σ/\sqrt{n} (n 은 측정 아이টে임의 수이고, $\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_V^2$ 이며 기호는 아래의 정의에서 참고)이 적정 수준 이내가 될 때까지 반복한다.

이 절차에 사용되는 기호는 다음과 같으며, 대문자로 표시되는 확률변수 기호에 대응하는 관측값은 소문자로 표시한다.

- X : 품질특성치를 나타내는 확률변수이며 분산은 σ_X^2 임.
- T : X 의 평균에 대한 목표치
- X_i : i 번째 아이টে임의 실현 예상값($(i-1)$ 번째 조정 후의 아이টে임 품질특성치 값임)이며, $E[X_i] = \mu_i$ 임.
- d : 최초 설정 작업 이후 목표치로부터의 편차에 대한 기댓값으로 $\mu_1 - T$ 가 됨.
- V_i : i 번째 아이টে임의 측정오차로 $E[V_i] = \mu_V = 0$ 이고 분산은 σ_V^2 임.
- Y_i : Y_i 는 i 번째 아이টে임에서 실제 얻은 품질특성치의 관측값으로 $X_i + V_i$ 가 됨.
- k_i : i 번째 조정에 사용되는 조정인자

다음과 같은 기본적인 가정하에서 전개해보자.

- ① X_i 와 V_i 는 독립이다.
- ② 생산된 아이탬의 측정값(또는 목표치를 차감한 편차)을 공정 파라미터의 함수로서 추정하기 위한 예비조사를 수행한다. 즉, 회귀분석 등을 통해 입력과 출력의 관계를 파악하여 조정을 적용할 수 있는 기초 정보를 가지고 있다고 가정한다.

i 번째 실현 예상값을 $X_i = \mu_i + W_i$ (여기서 W_i 의 기댓값과 분산은 각각 0과 σ_X^2 임)로 나타내면, i 번째 관측값은 $Y_i = X_i + V_i = \mu_i + W_i + V_i$ 가 된다.

첫 번째 아이탬의 관측값은 다음과 같이 나타낼 수 있으므로,

$$Y_1 = \mu_1 + W_1 + V_1 = T + d + W_1 + V_1$$

Y_1 과 목표치와의 편차는 아래와 같이 계산된다.

$$Y_1 - T = d + W_1 + V_1$$

따라서 작업자가 공정평균을 절차 ①에 따라 조정하면 μ_2 는

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_1 - k_1(d + W_1 + V_1) \\ &= T + d - k_1(d + W_1 + V_1) \\ &= T + (1 - k_1)d - k_1(W_1 + V_1) \end{aligned}$$

이 되어, 두 번째 관측값 Y_2 와 T 와의 편차는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_2 &= X_2 + V_2 = \mu_2 + W_2 + V_2 \\ &= T + (1 - k_1)d - k_1(W_1 + V_1) + W_2 + V_2 \\ Y_2 - T &= (1 - k_1)d - k_1(W_1 + V_1) + W_2 + V_2 \end{aligned}$$

이에 따라 작업자가 두 번째 보정($k_2(Y_2 - T)$)을 적용하면 공정평균은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \mu_2 - k_2[(1 - k_1)d - k_1(W_1 + V_1) + W_2 + V_2] \\ &= T + (1 - k_1)(1 - k_2)d - k_1(1 - k_2)(W_1 + V_1) - k_2(W_2 + V_2) \end{aligned}$$

이런 절차가 그림 14.20에 상세하게 표현되어 있으며, n 번째 조정 후에 $(n+1)$ 번째 관측값을 획득하는 데 적용된 평균 μ_{n+1} 은

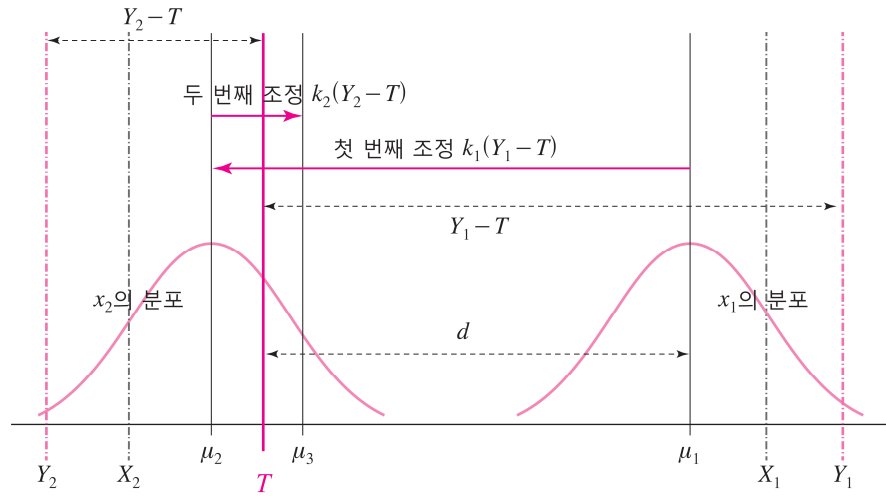


그림 14.20 Grubbs의 조정 절차

$$\begin{aligned}
 \mu_{n+1} &= T + (1 - k_1)(1 - k_2) \cdots (1 - k_n)d \\
 &\quad - k_1(1 - k_2)(1 - k_3) \cdots (1 - k_n)(W_1 + V_1) \\
 &\quad - k_2(1 - k_3) \cdots (1 - k_n)(W_2 + V_2) - \cdots - k_n(W_n + V_n) \\
 &= T + d \prod_{i=1}^n (1 - k_i) - \sum_{i=1}^n k_i (W_i + V_i) \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j) \quad (14.60)
 \end{aligned}$$

(단, $j > i$ 에 대해 $\prod_j^i a_j = 1$ 로 정의됨.)

가 되므로, n 번째 조정 후에 평균이 T 에 근접하도록 $k_i, i = 1, \dots, k_n$ 의 최적값을 찾는 문제가 된다. 따라서 다음의 최적화 문제로 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\min(\text{Var}(\mu_{n+1})) \\
 &s.t. \ E[\mu_{n+1}] = T \quad (14.61)
 \end{aligned}$$

식 (14.61)의 제약식에서 모든 i 에 대해 $E[W_i] = E[V_i] = 0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
 E[\mu_{n+1}] &= E\left[T + d \prod_{i=1}^n (1 - k_i) - \sum_{i=1}^n k_i (W_i + V_i) \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j) \right] \\
 &= T + d \prod_{i=1}^n (1 - k_i)
 \end{aligned}$$

이므로, 이 조건에서 d 가 0이 아닐 때 식 (14.62)가 성립해야 한다.

$$\prod_{i=1}^n (1 - k_i) = 0 \quad (14.62)$$

그리고 식 (14.61)의 목적함수는 모든 i 에 대해 $Var(W_i) = Var(X_i) = \sigma_X^2$, $Var(V_i) = \sigma_V^2$ 이므로,

$$\begin{aligned} Var(\mu_{n+1}) &= Var\left[T + d \prod_{i=1}^n (1 - k_i) - \sum_{i=1}^n k_i (W_i + V_i) \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2 \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j)^2 (Var(W_i) + Var(V_i)) \\ &= (\sigma_X^2 + \sigma_V^2) \sum_{i=1}^n k_i^2 \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j)^2 \end{aligned} \quad (14.63)$$

이 된다. 따라서 식 (14.62)와 식 (14.63)을 식 (14.61)에 대입하면 다음과 같은 제약식이 있는 비선형 최적화 문제가 된다.

$$\begin{aligned} \min & \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j)^2 \right) \\ \text{s.t.} & \prod_{i=1}^n (1 - k_i) = 0 \end{aligned} \quad (14.64)$$

14.7.2 라그랑주 승수법에 의한 최적성 검토

식 (14.64)의 제약조건이 있는 최적화 문제를 풀기 위해 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 도입하면, 목적함수는

$$Q(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n k_i^2 \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j)^2 + \lambda \left(\prod_{i=1}^n (1 - k_i) \right) \quad (14.65)$$

이 되므로, 이 목적함수의 최적값을 구하는 필요조건은 $\partial Q / \partial k_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 과 $\partial Q / \partial \lambda = 0$ 을 만족하는 해가 된다.

먼저 $\partial Q / \partial k_1 = 0$ 에서

$$\frac{\partial Q}{\partial k_1} = 2k_1 \prod_{j=2}^n (1-k_j)^2 - \lambda \prod_{j=2}^n (1-k_j) = 0 \Rightarrow \lambda = 2k_1 \prod_{j=2}^n (1-k_j)$$

가 되며, $\partial Q / \partial k_2 = 0$ 는

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial k_2} &= 2k_2 \prod_{j=3}^n (1-k_j)^2 + k_1^2 (-2)(1-k_2) \prod_{j=3}^n (1-k_j)^2 - \lambda(1-k_1) \prod_{j=3}^n (1-k_j) = 0 \\ &\Rightarrow 2k_2 \prod_{j=3}^n (1-k_j) - \lambda k_1 - \lambda(1-k_1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2k_2 \prod_{j=3}^n (1-k_j) \end{aligned}$$

가 되므로, 수학적 귀납법에 의해 다음이 성립한다.

$$\lambda = 2k_i \prod_{j=i+1}^n (1-k_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.66)$$

한편 $\partial Q / \partial \lambda = 0$ 에서 $\prod_{i=1}^n (1-k_i) = 1 - \sum_{i=1}^n k_i \prod_{j=i+1}^n (1-k_j)$ 가 되는 점을 이용하면,

$$\sum_{i=1}^n k_i \prod_{j=i+1}^n (1-k_j) = 1 \quad (14.67)$$

이 성립해야 하므로, 식 (14.66)을 식 (14.67)에 대입하면

$$\sum_{i=1}^n k_i \prod_{j=i+1}^n (1-k_j) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{2} = \frac{n\lambda}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{n}$$

가 된다. 특히 i 가 n 일 때 식 (14.66)에 대입하면

$$2k_n \prod_{j=n+1}^n (1-k_j) = 2k_n = \frac{2}{n} \Rightarrow k_n^* = \frac{1}{n}$$

가 구해진다.

$i = n-1$ 일 때 k_{n-1}^* 은 다음과 같이 $1/(n-1)$ 이 되므로,

$$2k_{n-1} \prod_{j=n}^n (1-k_j) = 2k_{n-1} (1-k_n) = 2k_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} \Rightarrow k_{n-1}^* = \frac{1}{n-1}$$

최적 k_i 은 다음과 같이 조화수열 형태(1, 1/2, 1/3, ...)로 표현되어 조화 규칙(harmonic rule)으로 불린다.

$$k_i^* = \frac{1}{i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (14.68)$$

최적 k_i 로서 식 (14.64)의 목적함수를 구해보면

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_i^{*2} \prod_{j=i+1}^n (1 - k_j^*)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i^2} \right) \prod_{j=i+1}^n \left[\frac{(j-1)^2}{j^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이 되므로, μ_{n+1} 의 최소 분산은 $Var(\mu_{n+1}) = (\sigma_X^2 + \sigma_V^2)/n = \sigma^2/n$ 가 된다. 하여튼 목표치 T 에 수렴하는 데 필요한 실제 소요시간(n)은 σ_X^2 와 σ_V^2 에도 여전히 의존함에 유의해야 한다.

그리고 각 설정 단계에서 하나의 아이템이 아닌 m 개의 아이템을 관측할 때(즉, $(i-1)$ 조정 후에 $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im}$ 를 관측)는 그림 14.20에서 Y_i 대신에 $\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^m Y_{ij}/m$ 를 대입하여 조정을 실시하며, 최적 k_i 값은 동일하고 최소분산만 $1/m$ 배로 감소한다.

예제 14.13 금속판의 두께에 대한 규격은 $2.1 \pm 0.08\text{cm}$ 이고 공정 목표치 T 는 2.07cm 이다. 첫 번째 금속판의 두께가 2.01cm 일 때 조화 규칙을 적용해보자.

두 번째 공정평균은 $\mu_2 = 2.07 - (2.01 - 2.07) = 2.13\text{cm}$ 로 조정된다. 만약 두 번째 금속판의 두께가 2.13cm 로 관측되면 $\mu_3 = 2.13 - (2.13 - 2.07)/2 = 2.10\text{cm}$ 로 조정된다. 그리고 세 번째 금속판의 두께가 2.10cm 로 관측되면 $\mu_4 = 2.10 - (2.10 - 2.07)/3 = 2.09\text{cm}$ 로 조정된다. 만약 4, 5, 6, 7번째의 장비 조정량이 매우 작아 공정조정을 실시하지 않는다면 공정조정을 끝내고 이런 절차가 다시 필요할 때까지 중단한다.

예제 14.14 공작기계의 목표치 T 는 0이고, 이 기계의 최초 $\mu(\mu_1)$ 은 표 14.5와 같이 목표치를 벗어난 12가 된다면, 목표치로부터의 기대 편차인 d 는 12가 된다. i 번째 설정 단계에서 조정을 실시하기 전의 실현값 \tilde{y}_i 은 d 와 측정오차가 포함된 표 14.5의 세 번째 칸 ($W_i + V_i$ 의 실현값 $w_i + v_i$)을 더한 네 번째 칸이 되므로, 이를 대상으로 조화 규칙의 수렴성을 조사해보자.

표 14.5에서 조화 규칙에 의한 조정을 실시한 후의 관측값 y_i 는 i 단계에 설정된 μ_i 와 세 번째 칸을 더한 값이 된다. 여기서 다섯 번째 칸의 μ_i 는 전 단계의 관측값에 대해 조화 조정 규칙을 적용하여 $\mu_{i+1} = \mu_i - k_i(y_i - T)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ (k_i 는 $1, 1/2, 1/3, \dots$)로 설정된다. 그리고 y_i 와 목표치와의 차가 일곱 번째 칸에, 이로부터 구한 조화 조정규칙에 의한 보정값은 마지막 칸에 수록되어 있다. 따라서 5단계까지의 누적 조정량 $-\sum k_i(y_i - T)$ 는 표 14.5에서 구하면 -13 이 되며, μ_i 는 i 가 증가됨에 따라 점점 0 (즉, T)에 근접해 간다.

표 14.5 Grubbs의 조화 규칙: 예제 14.14

i	d	$w_i + v_i$	\tilde{y}_i	μ_i	y_i	$y_i - T$	$-k_i(y_i - T)$
1	12	-3	9	12	9	9	-9
2	12	2	14	3	5	5	-2.5
3	12	7	19	0.5	7.5	7.5	-2.5
4	12	-4	8	-2	-6	-6	1.5
5	12	3	15	-0.5	2.5	2.5	-0.5

한편 Grubbs는 d 를 알려지지 않은 상수로 취급하지 않고 분산이 σ_d^2 인 확률변수일 경우에 식 (14.68)의 조화 조정규칙을 발전시킨 확장 조화 규칙(extended harmonic rule)을 다음과 같이 제안하였다.

$$k_i^* = \frac{1}{i + \frac{\sigma_d^2}{\sigma^2}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (14.69)$$

그리고 최근에 Trietsch(1998)은 Grubbs의 조화 규칙에서 매 단계마다 조정을 하지 않을 수 있도록 일반화시킨 조정 규칙을 제안하였으며, Del Castillo et al.(2003)은 베이저언 접근법과 Kalman filter에 기반하여 Grubbs의 두 조화 규칙의 특성을 조사하였다.

14.8 | 대용특성에 의한 검사방법

제품의 성능을 검사하기 위해 파괴시험이 요구되거나 검사비용이 매우 많이 들 경우 샘플링 검사 대신 대용특성을 이용하여 검사하는 것도 하나의 대안이 될 수 있다. 다만, 이때에는 대용

특성이 성능특성과 밀접한 연관성을 가지고 있어야 하며 그와 같은 특성이 없으면 적용할 수 없다. 대용특성에 의한 검사는 보통 전수검사를 실시하여 기준치에 미달하는 제품을 버리고 적합품만을 선별하게 된다. 철강 제품의 인장강도를 측정할 때 파괴검사 대신 X선 투시검사를 하거나 트랜지스터 수명을 판단하기 위해 소음 발생 정도를 측정하는 것은 대용특성을 이용한 예이다. 이와 같이 대용특성을 이용한 검사는 샘플링 검사에 비해 더 많은 데이터를 확보할 수 있으며 검사비용의 절감효과도 있다.

그러나 대용특성을 이용한 검사는 주 품질특성인 성능특성과 대용특성 간의 관계가 완벽하지 않으면 검사오류가 발생하여 적합품(양품)을 부적합품(불량)으로 판정하거나 부적합품을 적합품으로 판정할 위험이 있다. 전자를 생산자 위험, 후자를 소비자 위험이라고 하는데 이 두 종류의 위험을 가급적 작게 되도록 하는 것이 바람직하지만, 일반적으로 두 종의 위험을 동시에 줄이는 검사방식을 설계하기는 거의 불가능하다. 따라서 대용특성을 이용한 전수 검사방식을 설계할 때는 보통 선별된 제품의 적합품 비율이 일정 값 이상이 되도록 보증하는 검사기준을 설정한다.

이 절에서는 주 품질특성 Y 와 대용특성 X 가 양의 상관관계인 이변량 정규분포를 따르고 모수값들이 알려져 있을 경우에 대해 대용특성 X 의 검사기준치를 정하는 방법에 대해 소개한다. 모수값을 모를 경우에 대해서는 Owen and Su(1977)를 참고하기 바란다.

14.8.1 한쪽 규격이 주어진 경우

규격하한이든 규격상한이든 한쪽 규격이 주어진 경우는 같은 방법으로 검사기준치를 정할 수 있으므로 여기서는 규격하한이 주어진 망대특성인 경우만 고려한다. 분포의 모수가 모두 알려져 있으므로 Y 에 설정된 규격하한 L 이 주어지면 그에 따라 선별 전 적합품 비율 γ 가 얻어진다. 이때 대용특성 X 에 의한 선별검사 후 얻고자 하는 적합품의 비율이 δ 라고 한다면

$$\Pr(Y \geq L | X \geq \omega) \geq \delta \quad (14.70)$$

를 만족하는 $\omega = \omega^*$ 가 선별검사의 기준치가 된다. 즉, 각 검사대상 제품의 대용특성 X 를 측정하여 $\omega = \omega^*$ 보다 작으면 해당 제품은 부적합품으로 처리한다. 이와 같은 방식은 선별검사에서 통과된 제품의 적합품 비율이 δ 이상 되도록, 즉 부적합품 비율이 최대 $1 - \delta$ 를 넘지 못하도록 함으로써 소비자가 일정 수준 이상의 품질을 확보할 수 있도록 보증하는 방식으로서 생산자 위험 $\alpha = \Pr(X < \omega | Y \geq L)$ 이나 소비자 위험 $\beta = \Pr(X \geq \omega | Y < L)$ 과 직접적인 관계가 있는 것은 아니지만 소비자를 보호하는 쪽에 더 무게를 두고 있다고 할 수 있다.

(X, Y) 의 결합확률밀도함수를 $f(x, y)$, X 의 주변확률밀도함수를 $f_X(x)$ 라 한다면 식

(14.70)은

$$\Pr(Y \geq L | X \geq \omega) = \frac{\int_L^\infty \int_\omega^\infty f(x, y) dx dy}{\int_\omega^\infty f_X(x) dx} \geq \delta \quad (14.71)$$

이 되고, $f(x, y)$ 와 $f_X(x)$ 의 구체적인 함수형태 및 보증하고자 하는 품질수준 δ 가 주어지면 식 (14.71)을 만족하는 선별검사의 판정기준 ω 의 최적값(선별기준치) $\omega = \omega^*$ 를 구할 수 있다.

(X, Y) 가 이변량 정규분포(부록 A 참고)를 따를 경우 평균, 분산 및 상관계수가 알려져 있다고 하더라도 식 (14.71)을 간단한 식의 형태로 나타낼 수는 없으며 수치적 계산에 의존할 수밖에 없다. 표 14.6은 Owen et al.(1975) 등이 이와 같은 상황에서 $\omega = \omega^*$ 를 구할 수 있도록 $\Pr(X \geq \omega^*)$ 의 값을 정리한 것이다. 만약, $\Pr(X \geq \omega^*) = \pi$ 이라면 $\Pr(X < \omega^*) = 1 - \pi$ 이므로

표 14.6 $\delta = 0.95$ 를 만족하는 $\pi = \Pr(X \geq \omega^*)$ 의 값

선별 전 양품의 비율 γ	상관계수 ρ								
	.600	.650	.700	.750	.800	.850	.900	.950	1.000
.750	.2812	.3550	.4282	.4589	.5661	.6292	.6882	.7432	.7895
.760	.3035	.3780	.4509	.5206	.5863	.6476	.7043	.7567	.8000
.770	.3273	.4022	.4745	.5430	.6070	.6661	.7205	.7703	.8105
.780	.3527	.4276	.4991	.5661	.6281	.6849	.7368	.7839	.8211
.790	.3798	.4543	.5246	.5898	.6496	.7040	.7532	.7975	.8316
.800	.4086	.4823	.5511	.6142	.6715	.7232	.7696	.8110	.8421
.810	.4392	.5117	.5785	.6392	.6938	.7427	.7862	.8246	.8526
.820	.4716	.5425	.6069	.6648	.7165	.7623	.8023	.8381	.8632
.830	.5060	.5746	.6362	.6910	.7395	.7821	.8194	.8516	.8737
.840	.5423	.6081	.6664	.7178	.7628	.8020	.8360	.8651	.8842
.850	.5806	.6429	.6975	.7450	.7863	.8220	.8526	.8784	.8947
.860	.6209	.6789	.7293	.7727	.8100	.8419	.8691	.8917	.9053
.870	.6679	.7162	.7618	.8007	.8338	.8618	.8855	.9048	.9158
.880	.7067	.7544	.7947	.8288	.8575	.8816	.9016	.9177	.9263
.890	.7519	.7933	.8280	.8569	.8811	.9011	.9176	.9305	.9368
.900	.7981	.8327	.8612	.8846	.9043	.9202	.9331	.9430	.9474
.910	.8446	.8718	.8940	.9121	.9268	.9388	.9482	.9552	.9579
.920	.8905	.9100	.9256	.9382	.9484	.9565	.9627	.9671	.9684
.930	.9341	.9459	.9552	.9626	.9684	.9730	.9763	.9785	.9789
.940	.9727	.9774	.9811	.9840	.9861	.9878	.9885	.9894	.9895

ω^* 의 값은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\omega^* = \mu_X - z_{1-\pi}\sigma_X \quad (14.72)$$

식 (14.72)에서 $z_{1-\pi}$ 는 표준 정규분포의 누적분포함수를 $\Phi(\cdot)$ 라 할 때 우측 꼬리확률이 $1-\pi$, 즉 $\Phi(z_{1-\pi})=\pi$ 를 만족하는 상수이다. 이때 선별 후 부적합품 중에서 성능특성이 규격하한 이상인 제품의 비율은 $(\gamma - \delta\pi)/(1-\pi)$ 이 된다.

예제 14.15 망대특성인 주 품질특성과 대응특성의 상관계수값이 $\rho = 0.95$ 이고 제품의 선별 전 적합품 비율이 $\gamma = 0.80$ 로 알려져 있다. 대응특성의 평균과 표준편차는 각각 $\mu_X = 10$, $\sigma_X = 2$, 선별 후 보증하고자 하는 적합품 비율이 $\delta = 0.95$ 라면 선별검사 기준을 정해보자.

표 14.6으로부터 $\pi = \Pr(X > \omega^*) = 0.8110$ 을 얻을 수 있고 $1 - \pi = 1 - 0.8110 = 0.1890$ 이므로, 이로부터 다음과 같이 선별기준치를 구할 수 있다.

$$\omega^* = \mu_X - z_{0.1890}\sigma_X = 10 - (0.8816)(2) = 8.237$$

이때 X 가 8.237이상이면 적합으로 판정하며, 이때 대응특성에 의해 부적합품으로 판정된 제품 중에서 실제 적합품의 비율은 $(0.8 - 0.95 \times 0.8110)/0.1890 = 0.1563$ 이 된다.

그리고 두 특성의 상관계수가 음이거나 규격상한 U (즉, 망소특성)가 주어질 경우는 다음과 같이 변형하여 적용하면 된다.

① 규격하한이 주어지고 상관계수가 음일 경우

상관계수의 절댓값을 취하여 표 14.6으로부터 π 를 구한 후에 대응특성이 $w^* = \mu_X + z_{1-\pi}\sigma_X$ 이하이면 적합으로 판정한다.

② 규격상한이 주어지고 상관계수가 음일 경우

상관계수의 절댓값을 취하여 표 14.6으로부터 π 를 구한 후에 대응특성이 $w^* = \mu_X - z_{1-\pi}\sigma_X$ 이상이면 적합으로 판정한다.

③ 규격상한이 주어지고 상관계수가 양일 경우

표 14.6으로부터 π 를 구한 후에 대응특성이 $w^* = \mu_X + z_{1-\pi}\sigma_X$ 이하이면 적합으로 판정한다.

14.8.2 양쪽 규격이 주어진 경우

주 품질특성 Y 에 대해 규격하한 L 과 규격상한 U 가 동시에 주어진 경우를 생각해보자. 먼저 주 품질특성을 기준으로 규격하한 L 이상이 되는 비율을 γ_1 , 규격상한 U 이하가 되는 비율을 γ_2 라고 하자. Y 의 값이 L 과 U 사이에 있는 제품은 적합품이므로, 선별검사 이전의 적합품 비율은 $\gamma_1 + \gamma_2 - 1$ 이 된다. 따라서 이 문제는 적합품의 비율이 선별검사 전 $\gamma_1 + \gamma_2 - 1$ 로부터 선별검사 후 δ 이상이 되도록 대응특성 X 에 의한 선별검사 기준을 정하는 것이다. 만약 X 와 Y 가 양의 상관관계라면 선별검사 기준은

$$\Pr(L \leq Y \leq U | \mu_X - z_{\beta_1}\sigma_X \leq X \leq \mu_X + z_{\beta_2}\sigma_X) \geq \delta \quad (14.73)$$

을 만족하는 z_{β_1} 과 z_{β_2} 를 구함으로써 정할 수 있다. 그런데 양쪽 규격이 주어진 경우는 한쪽 규격이 주어진 경우와는 달리 선별검사 후 목표 적합품 비율 δ 가 어떤 값이든 상관없이 항상 달성될 수 있는 것은 아니다.

먼저 규격하한과 규격상한을 벗어나는 비율이 $1 - \gamma_1 = 1 - \gamma_2$ 로서 똑같은 경우를 먼저 살펴보자. $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ 이라 두면 선별검사 전 적합품 비율은 $2\gamma - 1$ 이 될 것이다. 이 경우 선별검사 기준은 $\mu_X - z_{1-\pi}\sigma_X \leq X \leq \mu_X + z_{1-\pi}\sigma_X$ 으로서 전체 검사대상 제품의 $2\pi - 1$ 만큼 선별하여 적합하다고 판정하게 된다. 이때 이론적으로 선별검사를 통해 달성할 수 있는 δ 값은 $\Pr(L \leq Y \leq U | \mu_X - z_{1-\pi}\sigma_X \leq X \leq \mu_X + z_{1-\pi}\sigma_X)$ 으로서 최대

$$2\Phi\left(\frac{z_{1-\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 \quad (14.74)$$

을 넘지 못한다(연습문제 14.25 참고).

Li and Owen(1979)은 γ 와 ρ 가 주어지면 π 로부터 $z_{1-\pi}$ 를 구할 수 있도록 표로 정리하였다. 표 14.7은 $\delta = 0.90$ 일 경우 $z_{1-\pi}$ 를 구하기 위한 표를 일부 발췌하여 다시 정리한 것이다. 표 14.7에서 비어 있거나 ‘*’가 기입된 난은 목표 품질수준 $\delta = 0.90$ 을 달성할 수 있는 선별검사 기준이 없음을 나타낸다.

$\gamma_1 \neq \gamma_2$ 일 경우는 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ 일 경우와 같은 표를 이용하되 γ_1, γ_2 에 대응하는 $z_{1-\pi_1}, z_{1-\pi_2}$

값을 찾아 선별검사 기준 $\mu_X - z_{1-\pi_1}\sigma_X \leq X \leq \mu_X + z_{1-\pi_2}\sigma_X$ 을 적용하면 된다. 이때 선별 후 적합품의 비율은

$$\delta = \frac{1}{\pi_1 + \pi_2 - 1} \int_{z_{1-\gamma_1}}^{z_{1-\gamma_2}} \int_{z_{\pi_2}}^{z_{\pi_1}} \psi(u, v; \rho) dudv \quad (14.75)$$

(여기서, $\psi(\cdot, \cdot, \cdot; \rho)$ 는 상관계수 ρ 인 표준 이변량정규분포의 확률밀도함수임.)

로서 정확하게 δ 와 일치하는 것이 아니라 약간의 차이가 있게 된다(연습문제 14.26 참고).

예제 14.16 어떤 부품의 내부에 걸리는 전압을 Y 라 하자. 부품 검사를 할 때 내부전압을 직접 측정하기 어려우므로 외부전압 X 를 측정하여 선별한다. 내부전압 Y 에 요구되는 규격은 12 ~ 16V이며 이를 벗어나는 부품은 부적합품으로 폐기된다. Y 의 평균과 표준편차는 각각 $\mu_Y = 13.8\text{V}$, $\sigma_Y = 2.13\text{V}$ 이며 X 와 Y 의 상관계수는 $\rho = 0.90$ 이라고 한다. 이제 선별 후 목표 품질수준 $\delta = 0.9$ 를 달성하고자 할 때, 선별검사 기준을 정해보자.

먼저 γ_1 과 γ_2 를 구하면

$$\gamma_1 = \Pr(Y > 12) = 1 - \Phi\left(\frac{12 - 13.8}{2.13}\right) = 1 - \Phi(-0.845) = 0.80$$

$$\gamma_2 = \Pr(Y \leq 16) = \Phi\left(\frac{16 - 13.8}{2.13}\right) = \Phi(1.033) = 0.85$$

이다. 표 14.7로부터 $(\rho, \delta, \gamma_1) = (0.9, 0.9, 0.8)$ 에 대응하는 $z_{1-\pi_1} = 0.5252$ 이고 $(\rho, \delta, \gamma_2) = (0.9, 0.9, 0.85)$ 에 대응하는 $z_{1-\pi_2} = 0.9357$ 을 얻는다. 따라서 선별검사 기준 $\mu_X - 0.5252\sigma_X \leq X \leq \mu_X + 0.9357\sigma_X$ 을 만족하는 부품은 모두 적합품으로 받아들인다. 그리고 선별 후 적합품의 비율을 식 (14.76)으로부터 구하면 거의 0.9에 근접한 값을 가진다.

표 14.7 $\delta = 0.90$ 를 만족하는 $z_{1-\pi}$ 의 값

$\gamma \backslash \rho$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.75					*	0.4948	0.7647
0.76					*	0.5523	0.8026
0.77				*	0.2080	0.6090	0.8426
0.78				*	0.3373	0.6657	0.8820
0.79				*	0.4368	0.7231	0.9239
0.80				*	0.5252	0.7814	0.9674
0.81			*	0.1722	0.6085	0.8411	1.0129
0.82			*	0.3681	0.6894	0.9026	1.0606
0.83			*	0.5027	0.7699	0.9664	1.1108
0.84		*	0.1563	0.6200	0.8517	1.0329	1.1639
0.85		*	0.4205	0.7304	0.9357	1.1029	1.2206
0.86		*	0.5914	0.8396	1.0234	1.1771	1.2816
0.87	*	0.4132	0.7411	0.9503	1.1159	1.2565	1.3476
0.88	0.0100	0.6394	0.8850	1.0658	1.2151	1.3424	1.4202
0.89	0.5404	0.8325	1.0312	1.1893	1.3231	1.4370	1.5011
0.90	0.8041	1.0201	1.1863	1.3245	1.4432	1.5428	1.5932
0.91	1.0464	1.2170	1.3574	1.4772	1.5804	1.6644	1.7013
0.92	1.3008	1.4388	1.5561	1.6574	1.7438	1.8102	1.8339
0.93	1.6008	1.7099	1.8046	1.8854	1.9522	1.9983	2.0099
0.94	2.0187	2.0981	2.1656	2.2212	2.2622	2.2842	2.2865

14.9 | 선택조립 방식*

조립제품에 요구되는 가공 정밀도가 높을 경우에 허용차의 누적 현상까지 고려하여 요구 정밀도를 충족하려면 부품의 가공치수가 극히 정밀해야만 한다(4.4~4.5절 참고). 그러나 가공 정밀도의 향상을 위해서는 기하급수적으로 상승하는 원가 부담을 감수해야 하므로 제품의 가격 경쟁력 확보에 지장을 초래하게 된다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 산업현장에서는 두 부품으로 조립할 때 일단 생산된 두 종류의 부품 치수를 측정하여 적절하게 몇 개의 범주로 분류한

후, 요구되는 정밀도를 충족시킬 수 있는 부품들을 선택하여 짝을 맞추어 조립하는 방식을 많이 사용한다. 이와 같이 부품들을 조립하기 전에 치수별로 분류한 후 제품의 목표치수에 가깝도록 선택하여 조립하는 방식을 선택조립(selective assembly)이라고 한다.

선택조립 방식은 조립 후 피스톤과 실린더 사이의 간격이 성능에 크게 영향을 주는 내연엔진이나 바디와 니들의 틈이 성능에 영향을 주는 연료분사장치 등 두 개의 핵심부품을 조립하여 완성되는 고정밀 제품을 생산할 때 많이 사용되는 제조기법이다. 선택조립은 공정능력이 부족하여 정밀도가 떨어지는 부품가공공정이라 하더라도 높은 정밀도의 조립품 생산을 가능하게 해준다. 그러나 선택조립방식은 경제적인 조립품 정밀도 향상이라는 장점만 있는 게 아니라 적절한 짝을 찾지 못하여 조립되지 못한 채 남은 미조립 부품으로 인해 손실이 발생하는 단점도 가지고 있다.

선택조립에는 등간격 분할방식, 등면적 분할방식, 통계적 매칭방식 등이 있다. 어떤 방식을 취하는가에 따라 조립품 정밀도와 미조립품 발생 정도가 다르게 되므로 정밀도 향상과 손실 저감 중 어느 쪽 비중이 더 높은가에 따라 적절한 방식을 정해야 한다. 이 절에서는 선택조립 방식의 기본적인 유형을 소개하고 장단점을 살펴본다.

14.9.1 등간격 분할방식

두 부품 모두 측정된 치수에 의거하여 대응하는 등급끼리 동일한 간격으로 부품들을 분류하는 방식을 등간격 분할(equal width partitioning)이라 한다. 등간격 분할방식의 선택조립은 1958년 Burr에 의해 쌍으로 조립되는 제품 공차의 이론적 및 현실적인 측면이 연구된 이래 초기에 주로 공차를 충족하기 위한 수단으로 산업현장에서 많이 활용되었다. 등간격 분할방식 중에서 각 부품 등급의 간격까지 동일하게 설정하는 방식이 널리 쓰이는데 여기서는 이중 등간격 방식이라 명명한다.

다음 예를 통해 두 등급으로 구분하여 선택조립하는 방식이 이를 채택하지 않는 무작위 조립 방식보다 우수함을 확인해보자.

예제 14.17 부품 X 는 평균 20mm 표준편차가 0.5mm인 정규분포를, 부품 Y 는 평균이 20mm이며 표준편차 0.5mm인 정규분포를 따르고, 서로 독립이다. 각 부품이 규격 (20 ± 1.5) 내에 속해야 조립할 수 있으며, 제품의 특성치는 $|X - Y|$ 로 1.0mm 이상이면 부적합품으로 처리된다. 두 부품을 무작위로 추출하여 조립할 경우와 각각 평균을 기준으

로 두 등급으로 구분한 후에 각 부품을 검사하여 작은 부품은 작은 부품끼리, 큰 부품은 큰 부품끼리 이중 등간격 방식으로 조립하는 경우의 부적합품률을 구해 비교해보자.

X 와 Y 가 독립이고 각각 평균이 μ_X, μ_Y 이고 분산이 σ^2 으로 동일한 정규분포를 따르는 경우에 두 부품이 규격 내에 포함될 때 무작위 조립 방식의 조건부 부적합품률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\pi_{RA} &= \Pr(|Y - X| > 1.0 | A) = 1 - \Pr(Y - 1.0 \leq X \leq Y + 1.0 | A) \\ &= 1 - \int_{-3}^3 \phi\left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma}\right) \left[\Phi\left(\frac{y + 1.0 - \mu_X}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y - 1.0 - \mu_X}{\sigma}\right) \right] dy\end{aligned}\quad (14.76)$$

(여기서, $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도와 누적분포함수이고,

$$A = \{18.5 \leq X \leq 21.5, 18.5 \leq Y \leq 21.5\} \text{ 임.})$$

각 부품이 규격 내에 포함될 확률(p_A)은 0.9973이므로, 무작위 조립방식에서 식 (14.76)을 이용하여 규격을 충족한 두 부품이 적합품이 될 확률 P_R 은 수치적분으로 구하면

$$P_R = \frac{1 - \pi_{RA}}{p_A^2} = \frac{1}{p_A^2} \int_{-3.0}^{3.0} \phi\left(\frac{y - 20}{0.5}\right) \left[\Phi\left(\frac{y + 1.0 - 20}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{y - 1.0 - 20}{0.5}\right) \right] dy = 0.8493$$

가 되므로, 이로부터 전체 부품 중에서의 부적합품률 π_R 은

$$\pi_R = 1 - p_A^2 + p_A^2(1 - P_R) = 0.1553$$

가 된다.

두 부품 모두 평균(20mm)을 경계로 이중 등간격 분할방식을 적용하여 선택조립하는 경우를 고려해보자. 먼저 두 부품이 모두 평균보다 큰 등급일 때(즉, $A_{22} = \{20 < X \leq 21.5, 20 < Y \leq 21.5\}$) 조립할 경우의 적합품률 P_{S2} 은 적분영역을 반영하여 다음과 같이 구할 수 있으므로,

$$\begin{aligned}P_{S2} &= \Pr(|X - Y| \leq 1.0 | A_{22}) \\ &= \frac{1}{(p_A/2)^2} \left[\int_0^{1.0} \phi(z)(\Phi(z + 2.0) - 0.5) dz + \int_{1.0}^{2.0} \phi(z)(\Phi(3.0) - 0.5) dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{2.0}^{3.0} \phi(z)(\Phi(3.0) - \Phi(z - 2.0)) dz \right] = 0.9794\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 상기와 더불어 두 부품이 평균보다 모두 작은 등급일 경우 ($A_{11} = \{18.5 \leq X < 20, 18.5 \leq Y < 20\}$)를 고려하면($P_{S1} = P_{S2}$), 선택조립 방식일 때 전체 부품 중에서의 부적합품률 π_S 은

$$\pi_S = 1 - p_A^2 + p_A^2 \times 2(0.5p_A/p_A)(1 - P_{S1}) = 0.0259$$

가 되므로, 무작위 조립방식보다 부적합품률을 1/6로 줄일 수 있다.

예제 14.17에서는 짝을 이루어 조립하는 등급에 속하는 부품의 수가 충분하다는 가정이 필요하며, 이 가정하에서 두 등급보다 등간격 형태의 등급 수를 증가시켜 조립하면 부적합품률이 감소하는 것은 명확하다(Mease et al(2004); 세 등급으로 구분하는 경우에 대해서는 연습문제 14.27 참고).

그러나 등간격 방식은 조립품 정밀도 향상에는 효과적이라고 할 수 있으나 미조립 부품발생으로 인한 손실이 클 수 있다는 단점이 있다. 예를 들어 그림 14.21은 A, B 두 부품을 측정하여 치수별로 간격까지 동일한 이중 등간격 분할방식에 의해 6개 등급으로 나누어 분류한 결과를 보여주고 있다. 두 부품의 치수 X, Y 는 각각 평균이 $16\mu\text{m}, 10\mu\text{m}$ 이고 분산이 $1\mu\text{m}, 1.5\mu\text{m}$ 인 정규분포를 따른다고 할 때, 각 등급에 속한 부품들의 비율은 정규곡선과 등급을 구분하는 경계선 사이의 면적과 같게 된다. 조립제품 치수 $X - Y$ 의 목표값은 $6\mu\text{m}$ 이고 동일 등급에 속한 부품들끼리 짝을 맞추어 조립한다고 하자. A, B 두 부품의 생산 수량이 매일 1만 단위로 동일하다면 표 14.8에 나타난 바와 같이 각 등급에 속한 A와 B부품의 수에 상당한 차이가 있을 것이고 그 합계인 1,936개의 부품은 미조립 부품으로 폐기처분할 수밖에 없게 된다.

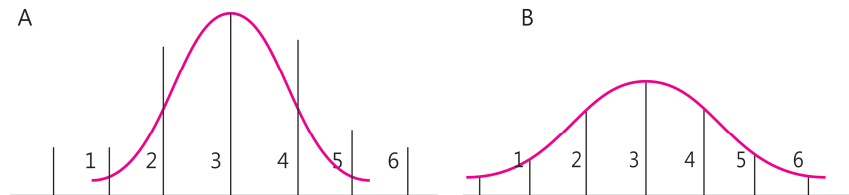


그림 14.21 선택조립을 위한 부품치수의 등간격 분할 예시

표 14.8 등간격 분할방식의 미조립 부품 발생량

등급	부품 A		부품 B		미조립 부품 수
	비율	수량	비율	수량	
1	0.0214	214	0.0441	441	227
2	0.1359	1,359	0.1559	1,559	200
3	0.3413	3,413	0.2929	2,929	484
4	0.3413	3,413	0.2929	2,929	484
5	0.1359	1,359	0.1559	1,559	200
6	0.0214	214	0.0441	441	227
등급 외	0.0028	28	0.0142	142	114
계	1.000	10,000	1.000	10,000	1,936

예제 14.18 쌍으로 조립되는 A, B 두 부품 치수의 표준편차가 각각 $1\mu\text{m}$, $2\mu\text{m}$ 일 때 평균을 중심으로 $\pm 1\mu\text{m}$ 이내인 부품들과 $-1\mu\text{m}$ 보다 작은 부품 및 $+1\mu\text{m}$ 보다 큰 부품들로 분류하여 조립한다고 하자. 장기적으로 미조립 상태로 남는 부품은 전체 부품의 몇 %나 되는가?

등급 1로 분류되는 부품 A의 비율은 $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$, 부품 B의 비율은 $\Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$ 이고 등급 3으로 분류되는 비율은 똑같이 0.1587, 0.3085이다. 등급 2로 분류되는 비율은 나머지 부분이므로 부품 A와 B의 비율은 각각 0.6826, 0.3830이 된다. 이를 표로 정리하면 표 14.9와 같으며 부품별 미조립 비율은 약 30%에 달함을 알 수 있다.

표 14.9 부품별 미조립 부품 비율: 예제 14.18

등급	등급별 부품 생산비율		등급별 미조립 부품 비율	
	A	B	A	B
1	0.1587	0.3085	0	0.1498
2	0.6826	0.3830	0.2996	0
3	0.1587	0.3085	0	0.1498
계	1.000	1.000	0.2996	0.2996

미조립 부품으로 인한 손실발생 문제는 두 부품 치수의 표준편차에 차이가 클수록 더욱 심각하

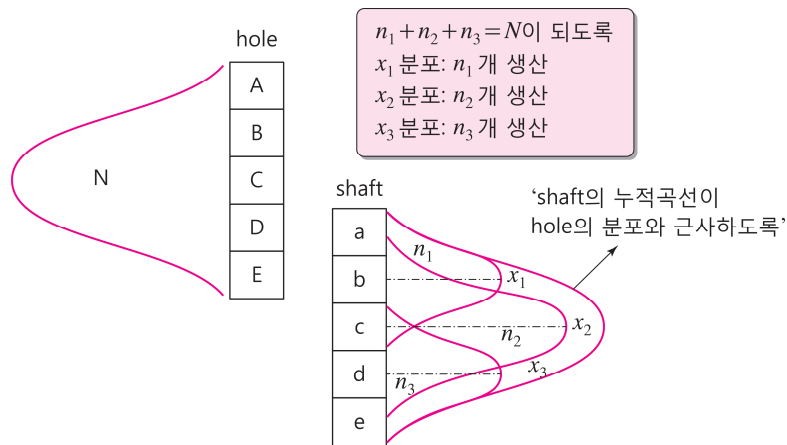


그림 14.22 생산량 조절에 의한 미조립 발생 예방(Mansoor, 1961)

게 된다. 두 부품치수의 산포가 달라서 발생하는 미조립 잉여부품 문제와 관련하여 Mansoor(1961)은 등간격 분할방식은 유지하되 산포가 작은 부품 생산공정의 가공목표치와 생산량을 그림 14.22와 같이 조절하여 해결하는 방안을 제안하였다. 즉, 예를 들어 hole과 shaft를 조립할 때 각각 5등급으로 구분할 경우 산포가 작은 shaft를 평균이 다른 세 분포로 생산하여 이를 결합한 분포가 hole의 분포와 근사해지도록 생산량을 조절하는 방법이다. 한편, Rabinovich and Kesoyan(1980)은 대응등급이 아니더라도 바로 이웃하는 등급으로 분류된 부품과도 조립을 허용하는 방안을 제안하고 있다.

14.9.2 등면적 분할방식

쌍으로 조립되는 부품의 대응 범주에 속할 비율을 동일하게 분류하는 방식을 등면적 분할(equal area partitioning)이라 한다. 그림 14.23은 다섯 등급으로 구분된 등면적 분할방식을 예시하고 있다. 이 방식은 등간격 분할방식에 비해 조립품 정밀도는 다소 떨어지지만 장기적으로

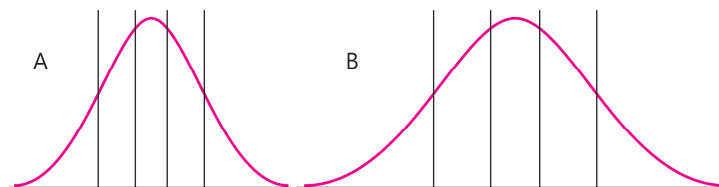


그림 14.23 선택조립을 위한 부품치수의 등면적 분할

미조립 부품으로 인한 손실을 방지할 수 있다. 특히 등면적 분할 방식 중에서 종종 쓰이는, 부품들의 등급면적까지 같은 분할방식을 여기서 이중 등면적 분할방식으로 칭한다.

예제 14.19 예제 14.17에서 이중 등면적 분할방식을 적용하여 세 등급으로 나눌 경우에 부적합품률을 구하라. 여기서 짝을 이루어 조립하는 등급에 속하는 부품의 수는 충분하다고 가정한다.

이 문제는 두 부품의 분산이 동일하며 평균까지 같은 경우이므로 등급 구간을 동일하게 설정할 수 있다. 같은 확률을 가지도록 세 등급으로 구분할 때 각 등급의 경계치를 ($x_0 = 18.5, x_1, x_2, x_3 = 21.5$)로 표시하면 각 등급에 포함될 확률은 $\Psi(i) = \Phi(2x_i - 40) - \Phi(2x_{i-1} - 40)$ 가 된다. 여기서 각 등급의 확률은 0.9973/3이 되므로 $\Psi(1) = \Psi(2) = \Psi(3) = 0.33243$ 이 된다. 이를 반영한 표준화한 등급 경계값은 부품의 구별 없이 $z_1 = \Phi^{-1}(0.00135 + 0.33243) = 0.33378 = -0.4295, z_2 = \Phi^{-1}(0.66621) = 0.4295$ 가 되므로 등급 경계값은 (18.5, 19.78525, 20.21475, 21.5)(표준화시키면 (-3, -0.4295, 0.4295, 3))으로 나타낼 수 있다. 따라서 세 등급에서의 적합품률 $P_{Si}, i = 1, 2, 3$ 은

$$\begin{aligned}
 P_{S1} = P_{S3} &= \frac{1}{\Psi(3)^2} \left[\int_{0.4295}^{1.0} \phi(z)(\Phi(z+2.0) - \Phi(0.4295))dz \right. \\
 &\quad + \int_{1.0}^{2.4295} \phi(z)(\Phi(3.0) - \Phi(0.4295))dz \\
 &\quad \left. + \int_{2.4295}^3 \phi(z)(\Phi(3) - \Phi(z-2.0))dz \right] = 0.1096 \\
 P_{S2} &= \frac{1}{\Psi(2)^2} \int_{-0.4295}^{0.4295} \phi(z)(\Phi(0.4295) - \Phi(-0.4295))dz = 1.0
 \end{aligned}$$

가 되므로, 총 부적합품률 π_S 은 다음과 같이 0.0107이 되어

$$\pi_S = 1 - p_A^2 + p_A^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\Psi(i)(1 - P_{Si})}{p_A} = 0.0107$$

세 등급으로 구분되는 이중 등간격 분할방식의 0.0054(연습문제 14.27)보다 큰 값을 가진다.

선택조립에서 두 부품 치수의 산포 차이가 크면 선택조립의 근본 목적인 조립품 정밀도 향상에 한계가 있게 되므로 이에 대한 선행 조치를 취하는 것이 일반적이다. Pugh(1992)는 두 부품 치수의 산포가 거의 같게 되도록 산포가 큰 부품치수의 절단분포를 구한 다음 이를 토대로 등면적 분할방식을 적용하는 방안을 제안하였다.

두 부품의 산포가 같을 경우 이중 등면적 분할방식은 등간격 분할방식의 일반화된 형태이다. 즉, 등급 간격이 같으면 대응등급에 속할 확률도 동일하게 되어 자연스럽게 등면적 분할이 된다. 그러나 등면적 분할방식에서는 이웃하는 등급 간 간격을 반드시 동일하게 할 필요는 없다. 이때 등급 수를 얼마로 하여 간격을 어떻게 정하는 것이 가장 경제적인 것인가가 핵심문제가 된다.

여기서는 다구치의 2차 손실함수를 도입하여 경제적인 선택조립 절차를 제시한 Kwon et al.(1999)의 연구 결과를 토대로 설명한다. 등면적 분할방식에서 등급 수를 m , i 번째 등급에 속한 두 부품의 치수를 X_i, Y_i 라 하고 조립품의 목표치수를 Δ 라 하자. 조립품 치수에 다구치 손실함수를 적용한다면 전체 등급의 조립 정밀도에 따른 손실함수는

$$Q_m = \sum_{i=1}^m D_i [k(X_i - Y_i - \Delta)^2] \quad (14.77)$$

이 된다. 단, 여기서 D_i 는 i 번째 등급에 속하면 1, 그렇지 않으면 0인 지시함수(indicator function)이며, k 는 2차 손실함수의 계수이다. 그런데 등급의 수가 증가하면 대응 부품을 찾기 위해 요구되는 노력이 증가할 것이므로 선택조립의 총 비용함수는

$$TC = C(m) + Q_m \quad (14.78)$$

와 같은 형태가 될 것이다. 여기서 $C(m)$ 은 m 의 증가함수이다. 두 부품 치수는 독립적으로 각각 평균이 각각 μ_X, μ_Y 이고 분산이 동일하게 σ^2 인 정규분포를 가정할 때 TC 의 기댓값은

$$ETC = C(m) + 2k\sigma^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \frac{[\phi(u_{i-1}) - \phi(u_i)]^2}{\Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})} \right\} \quad (14.79)$$

(단, $\phi(\cdot)$ 와 $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수임.)

임을 보일 수 있다(연습문제 14.29 참고). 여기서 u_1, u_2, \dots, u_{m-1} 은 등급 경계 결정에 사용되는 상수로서 두 부품의 i 번째 등급 경계치 x_i, y_i 는 다음 식으로 구한다.

$$x_i = \mu_X + u_i\sigma, \quad y_i = \mu_Y + u_i\sigma \quad (14.80)$$

식 (14.79)에서 m 이 주어지면 u_1, u_2, \dots, u_{m-1} 의 최적값은 동일한 방법으로 결정되며, 다음 식을 만족함을 보일 수 있다(Kwon et al., 1999).

$$u_i^o = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\phi(u_{i-1}^o) - \phi(u_i^o)}{\Phi(u_i^o) - \Phi(u_{i-1}^o)} + \frac{\phi(u_i^o) - \phi(u_{i+1}^o)}{\Phi(u_{i+1}^o) - \Phi(u_i^o)} \right\} \quad (14.81)$$

여기서 u_i^o 는 식 (14.81)로부터 바로 얻어지는 값이 아니고 순차적인 계산을 통해 구할 수 있으며 표 14.10에 정리되어 있다.

표 14.10 m 에 따른 표준화된 최적 등급 경계치

m	표준화된 등급 경계치
2	(0.000)
3	(-0.612, 0.612)
4	(-0.982, 0.000, 0.982)
5	(-1.244, -0.382, 0.382, 1.244)
6	(-1.447, -0.659, 0.000, 0.659, 1.447)
7	(-1.611, -0.874, -0.280, 0.280, 0.874, 1.611)
8	(-1.748, -1.050, -0.501, 0.000, 0.501, 1.050, 1.748)
9	(-1.865, -1.198, -0.681, -0.222, 0.222, 0.681, 1.198, 1.865)
10	(-1.968, -1.325, -0.834, 0.405, 0.000, 0.405, 0.834, 1.325, 1.968)

예제 14.20 A, B 두 부품의 치수 X, Y 는 각각 평균 $25\mu\text{m}, 20\mu\text{m}$ 이고 표준편차는 똑같이 $2\mu\text{m}$ 인 정규분포를 따른다고 하자. 평균은 조립품 치수의 목표치인 $5\mu\text{m}$ 에 맞추어 설정되어 있고 공차를 고려할 때 임의조립보다 등급 수 $m=3$ 인 등면적 분할 선택조립 방식이 적절할 것으로 판단된다. 등면적 분할 방식에서 등급 경계치를 어떻게 정하는 것이 좋은가?

표 14.10으로부터 $(u_1^o, u_2^o) = (-0.612, 0.612)$ 이므로 부품 A의 등급 경계치는 $25 - (0.612)(2) = 23.776$ 및 $25 + (0.612)(2) = 26.224$, 부품 B의 등급 경계치는 $20 - (0.612)(2) = 18.776$ 및 $20 + (0.612)(2) = 21.224$ 로 설정한다.

14.9.3 통계적 매칭방식

통계적 매칭은 범주로 분할하지 않고 미리 정해진 n 개의 대응 부품들의 치수를 비교하여 조립결과가 가장 좋게 되는 부품들을 짝을 지어 조립하는 방식을 칭한다. 이 방식은 Boyer and Nazemetz(1985)에 의해 제안되었으며 n 의 증가에 따라 비교연산이 급격하게 증가하고 매번 조립할 때마다 목표 정밀도 달성의 확실성을 보증할 수 없다는 단점이 있으나 미조립 부품 발생을 방지할 수 있다는 장점이 있다. 그림 14.24은 통계적 매칭방식의 적용과정을 보여주는데 두 부품의 유형별로 생산된 n 개의 부품들의 치수(X_i, Y_i)를 비교하여 조립될 부품의 짝을 정한다.

조립될 두 부품의 짝짓기 방식으로는 순서통계량을 이용하여 치수 크기로 보아 같은 순서에 해당하는 부품들끼리 조립하는 순서 매칭방식과 n^2 가지의 가능한 짝 중에서 조립제품의 치수가 목표치에 가장 가까운 짝을 찾아 조립하는 최선 매칭방식이 있다. 치수 비교에 걸리는 시간이 문제가 되지 않는다면 최선 매칭방식이 순서 매칭방식보다 정밀도 개선효과가 더 크다. 권혁무 등(2017)의 연구에 의하면 최선 매칭방식의 경우 시뮬레이션을 이용하여 분석한 결과 $n = 10$ 정도만 되어도 거의 등간격 분할방식에 버금갈 정도로 정밀도 개선효과가 있는 것으로 나타났다.

선택조립으로 품질을 제고하고자 할 때 각 방식에 따라 장단점이 있으므로 주어진 환경조건을 고려하여 어떤 방식이 최선인가를 정해야 한다. 분할 방식일 경우 등간격 혹은 등면적 중 어떤 분할방식을 취할 것인지와 함께 분할 등급 수와 간격을 정해야 한다. 또, 통계적 매칭 방식일 경우 조립 전에 비교할 부품의 수 n 과 매칭 방식을 결정해야 한다. 선택조립을 적용하기 위한 구체적인 방식을 어떻게 정하는 것이 좋은가에 대한 연구가 그리 많지는 않다. 컴퓨터 알고리즘

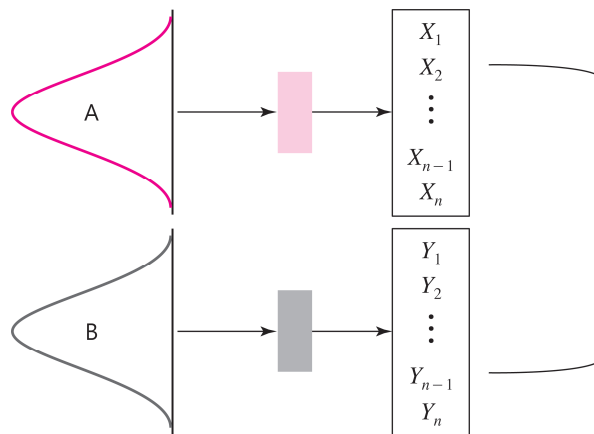


그림 14.24 통계적 매칭 방식에 의한 선택조립

을 제시한 연구도 있지만, 중요한 이론적 연구들만 살펴보면 Kwon et al.(1999), Kannan and Jayabalan(2001), Mease et al.(2004), Matsuura and Shinozaki(2007) 등을 들 수 있다. 또한 선택조립의 특성상 측정오차가 크면 정밀도 개선효과가 급감할 수밖에 없다. 측정오차는 Matsuura and Shinozaki(2007)에 의해 일부 취급되었는데, 앞서 소개한 방식들에 대해서도 광범위하게 그 영향을 파악할 필요가 있다.



연습문제

- 14.1 부품의 규격이 $2 \pm 0.01\text{cm}$ 이고 규격하한과 상한을 벗어날 때의 비용은 각각 120,000원, 40,000원이다. 정규분포를 따르고 공정 표준편차가 0.004cm일 때 최적 공정평균을 구하라.
- 14.2 부품의 규격이 $40 \pm 4\text{cm}$ 이고 규격하한과 상한을 벗어날 때의 비용은 각각 2,000원, 40,000원이다. 정규분포를 따르고 공정 표준편차가 0.1cm일 때 최적 공정평균을 구하라.
- 14.3 샤프트의 규격이 $20 \pm 0.1\text{cm}$ 이고 규격하한과 상한을 벗어날 때의 비용은 각각 240,000원, 40,000원이다. α 와 β 가 각각 3과 1이고 현 구간 범위가 $20 \pm 0.2\text{cm}$ 인 베타분포를 따를 때 최적 공정평균과 이의 이동량을 구하라.
- 14.4 부품의 규격이 $1.5 \pm 0.0025\text{cm}$ 이고 규격하한과 상한을 벗어날 때의 비용은 각각 50,000원, 100,000원이다. α 와 β 가 각각 2와 3이고 현 구간 범위가 $1.5 \pm 0.004\text{cm}$ 인 베타분포를 따를 때 최적 공정평균과 이의 이동량을 구하라.
- 14.5 액체를 담은 충전공정에서 하한 기준은 1kg이며, 이 물질은 1kg당 4,000원이고 표준편차는 0.0025kg이다. 하한 기준을 통과한 단위제품의 이익은 4,000원이고 기준에 미달한 제품의 이익은 1,000원이다. 정규분포를 따르고 기준에 미달 시 할인 판매할 경우의 최적 공정평균과 기대이익을 구하라.
- 14.6 수프를 캔(하한 기준 0.5kg)에 담은 충전공정에서 이 물질은 1kg당 3,000원이며, 표준편차는 0.0025kg이다. 하한 기준을 통과한 단위제품의 이익은 1,000원이고 기준에 미달한 제품의 재작업 비용은 500원이다. 정규분포를 따르고 기준에 미달 시 재가공을 할 경우에 공정평균을 0.55kg으로 설정할 때 기대이익을 구하라.
- 14.7 연습문제 14.5에서 기준에 미달 시 재가공할 경우(재작업비는 100원)에 최적 공정평균과 기대이익을 구하라.
- 14.8* 식 (14.19)가 위로 볼록함수임을 보여라.
- 14.9* 식 (14.24)가 도출됨을 증명하라.
- 14.10* 식 (14.37)과 (14.38)이 도출됨을 보여라.
- 14.11 14.3.3소절의 모형에서 규격하한(10g)을 초과한 캔은 캔당 이익이 80,000원이고 초과한 g당 1,600원의 추가 수익을 얻으며, 규격하한에 미달한 캔은 캔당 이익이 50,000원인데 미달한 g당 12,000원을 할인한다. 그리고 공짜 비용은 g당 10,000원이고 표준편차는 0.04g이다. 공정평균이 10.05g일 때 기대이익을 구하라. 또한 최적 공정평균을 구하고 이때의 기대이익을 계산하여 비교하라.

- 14.12 연습문제 14.7에서 공정평균과 더불어 규격상한을 설정하고자 한다. 이들의 최적값과 기대이익을 구하고, 연습문제 14.7의 결과와 비교하여 규격상한을 설정한 효과를 검토하라.
- 14.13 시리얼 상자의 LSQ는 240g이고 MAV는 0.06g이며, 표준편차가 0.05g인 정규분포를 따른다. 표본크기가 8개일 때 개별요건과 평균요건의 최대 오류를 5%로 설정 시에 공정평균을 구하라.
- 14.14 생수의 병당 공칭 표시량은 500ml이고 검사로트의 크기는 2,500병일 때 OIML 검사계획을 구하고, 이의 요건을 자세하게 설명하라.
- 14.15* 품질특성치가 표준편차가 0.01이고 $\mu_t = 2 + 0.02t$ 인 정규분포를 따르며, 규격상한은 $2+0.1$ 이다. 그리고 시간당 100단위를 생산하며 c_s 는 300,000원, c_d 는 500원일 때, 최초 공정평균을 2로 설정할 경우에 기대비용을 최소로 하는 생산주기를 구하라.
- 14.16* 연습문제 14.15에서 규격상한과 하한이 각각 2.1과 1.9이고 다른 정보는 동일하다. 기대비용을 최소로 하는 최초 설정 공정평균과 생산주기를 구하라.
- 14.17* 14.6.2소절에서 양품당 기대비용으로부터 식 (14.57)이 도출됨을 보여라.
- 14.18* 공정에서 생산된 제품 특성치(X)의 평균이 그림 14.25($\theta > 0$ 인 경우)과 같이 선형 추세를 따르며, 규격상한과 하한은 규정되어 있지 않아 부적합에 따른 손실은 발생하지 않는다. 다만, 그 대신으로 개별 생산품에 대해 목표치(T)와의 편차에 따라 2차 손실함수 형태의 손실($L(x)$)이 발생하며(Drezner and Wesolowsky, 1989), 다른 가정과 기호는 14.6.1소절과 동일하다.

$$L(x) = k_2(x - T)^2, 0 < x < \infty, k_2 > 0$$

- (1) X 의 분산이 σ^2 일 때 $E[L(X)]$ 를 먼저 구하라.
- (2) 2차 손실함수가 T 에 대칭이므로 $\tau_1 = \tau_2$ 가 된다. 이를 이용하여 생산주기당 기대비용(공정 설정비용+손실)을 구하라.
- (3) 생산단위당 기대비용을 최소화하는 τ^* 가 $[6c_s/(mk_2\theta^2)]^{1/3}$ 이 됨을 보여라.
- (4) 그림 14.25를 참고하여 최초 공정평균 μ_0^* 을 구하라.

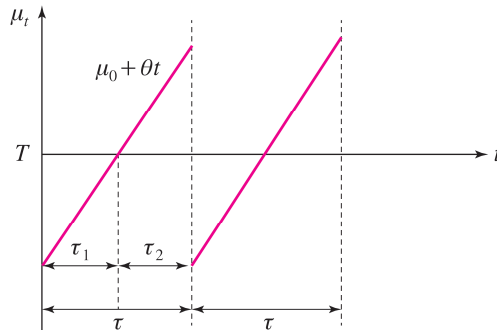


그림 14.25 생산주기 동안 공정 평균의 추세

14.19* 사출성형공정에서 금형은 점진적으로 마모되어 가공물의 외경은 증가한다. 금형의 교체주기를 정하기 위해 크기 5의 부분군 20개를 추출하여 평균과 범위를 구한 결과가 표 14.11에 정리되어 있으며, 규격하한과 상한은 각각 $60 \pm 4\text{mm}$ 이다. 회귀관리도를 작성하고, 금형의 교체시점을 구하라(단, 이 공정에서 최초 공정평균의 변경은 용이하지 않다).

표 14.11 사출성형 가공물 데이터

표본	\bar{x}	R	표본	\bar{x}	R
1	58.80	1.35	11	60.80	0.95
2	57.15	1.10	12	61.65	1.05
3	56.75	1.10	13	59.90	1.00
4	57.85	1.00	14	60.15	0.85
5	57.40	1.40	15	59.30	1.10
6	59.25	1.05	16	61.35	0.70
7	59.85	1.20	17	62.10	1.20
8	57.65	0.65	18	62.75	1.30
9	61.30	1.00	19	61.40	1.15
10	60.25	0.80	20	63.10	0.90

14.20* 각 설정 단계에서 $m(> 1)$ 개를 관측하여 Grubbs의 조화 규칙을 적용할 경우에 표본추출 시 각 단계마다 고정비 c_f 와 관측단위당 c_v 의 비용이 발생하며, n 번째 조정 후에 정규 생산을 시작하는데 이때 $c_a \text{Var}(\mu_{n+1})$ 의 손실이 발생한다. 여기서 $\text{Var}(\mu_{n+1}) = (\sigma_X^2 + \sigma_V^2)/(mn)$ 가 된다.

- (1) n 번째 조정 후에 발생 총비용(표본추출 비용과 정규 생산 시 손실의 합)을 구하라.
- (2) m 을 연속변수로 간주하여 (1)의 발생비용을 최소로 하는 m 을 구하라.

14.21* 각 설정 단계에서 하나의 관측치가 얻어지며, 측정오차 V 의 기댓값이 0이 아닌 μ_V 일 때 μ_{n+1} 의 기댓값과 분산을 도출하라. 이때 Grubbs의 조정절차를 μ_V 가 알려져 있다고 가정하여 수정하라.

14.22 주 품질특성(망대특성)과 대용특성의 상관계수 값이 $\rho = 0.80$ 이고 제품의 선별 전 적합품 비율이 $\gamma = 0.80$ 으로 알려져 있다. 대용특성의 평균과 표준편차는 각각 $\mu_X = 10$, $\sigma_X = 2$, 선별 후 보증하고자 하는 적합품 비율을 $\delta = 0.95$ 라 하고 선별검사 기준을 정하라.

14.23 연습문제 14.22에서 주 품질특성이 망소특성일 때 선별검사 기준을 정하라.

14.24 어떤 부품의 내부에 걸리는 전압을 Y 라 하자. 부품 검사를 할 때 내부전압을 직접 측정하기 어려우므로 외부전압 X 를 측정하여 선별한다. 내부전압 Y 에 요구되는 규격은 12~16V이며 이를 벗어나는 부품은 부적합품으로 폐기된다. Y 의 평균과 표준편차는 각각 $\mu_Y = 13.5\text{V}$, $\sigma_Y = 2.0\text{V}$ 이고 X 의 평균과 표준편차는 각각 $\mu_X = 20\text{V}$, $\sigma_X = 4.0\text{V}$ 이며, X 와 Y 의 상관계수는 $\rho = 0.90$ 이라고 한다.

- (1) 선별 후 목표 품질수준 $\delta = 0.9$ 를 달성하고자 할 때 선별검사 기준을 정하라.
 (2) 이 기준에 따라 검사하면 선별검사 후 실제 적합품 비율은 얼마인가?

14.25* 14.8.2절의 식 (14.74)이 성립함을 보여라.

14.26* 14.8.2절의 식 (14.75)이 성립함을 보여라.

14.27* 예제 14.17에서 동일한 간격을 가지는 세 등급의 이중 등간격 분할방식을 적용할 경우에 부적합품률을 구하라. 여기서 짝을 이루어 조립하는 등급에 속하는 부품의 수는 충분하다고 가정한다.

14.28* 두 부품 A, B를 조립하여 완성되는 제품이 있다. 조립품의 허용차가 $\pm 5\mu\text{m}$ 로 설정되어 있는데 두 부품 치수의 평균은 모두 목표치에 맞추어져 있으나, 표준편차가 모두 $3\mu\text{m}$ 로서 정밀도가 많이 떨어져 선택조립을 적용하고자 한다.

- (1) 이중 등간격 분할방식을 적용하여 각 부품의 가공치수가 평균과 지나치게 차이가 나서 폐기하는 부품 비율이 0.1% 이하가 되도록, 더불어 조립품 부적합품률은 없도록 하고 싶다면 몇 개 등급으로 나누어 조립하는 것이 좋은가?
 (2) (1)의 등급 수로 이중 등면적 분할방식을 적용한다면 등급의 경계치를 어떻게 설정하는 것이 좋겠는가?

14.29* 식 (14.77)에서 다음 식이 성립함을 보여라.

$$E[Q_m] = 2k\sigma^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \frac{[\phi(u_{i-1}) - \phi(u_i)]^2}{\Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})} \right\}$$

14.30* 두 부품치수 X, Y 의 평균이 μ_1, μ_2 이고 표준편차는 똑같이 1인 정규분포를 따르는 두 부품을 조립하여 생산되는 제품이 있다. 이제 n 개의 최적 등면적 분할방식으로 선택조립을 실시할 때 $n = 2, 3, 4$ 일 경우에 대해 다음 조립제품의 손실함수 L 의 기댓값을 구하라.

$$L = 0.2n + \sum_{i=1}^n D_i \{0.5(X_i - Y_i)^2\}$$

단, (X_i, Y_i) 는 i 번째 등급에 속한 두 부품의 치수이고 조립품이 i 번째 등급에 속한 두 부품을 조립한 것이면 $D_i = 1$, 그렇지 않으면 $D_i = 0$ 이다.

참고 문헌

용기 충전공정의 목표치 설정에 관해서는 Golhar(1987)를, 규격상한까지 고려하는 경우는 Golhar and Pollock(1988)을, 생산주기까지 포함한 통람논문으로는 Tahera et al.(2008)을 대표적으로 언급할 수 있다. 그리고 실량표시 상품에 관한 문제에 대해서는 서순근(2015)이, 공정평균이 변할 경우의 생산주기와 공정평균 설정은 Gibra(1974)이 도움이 될 것이다. 조화 조정 규칙은 Grubbs(1954)로부터, 선택조립은 Burr(1958)에 의해 최초로 제시되었으며, 대용특성과 선택조립 문제에 대해서는 먼저 각각 Tang and Tang(1994)와 Mease and Sudjianto(2004)를 읽어 보기를 권한다.

1. 권혁무, 이영준, 이민구, 홍성훈(2017), “선택조립방식의 효율성에 대한 시뮬레이션 검토,” 품질경영학회지, 45, 829-846.
2. 서순근 (2015), “OIML 혼합 샘플링 검사계획에 대한 고찰과 최적 목표값의 설정: 실량표시상품을 대상으로,” 대한산업공학회지, 41, 17-24.
3. KS A 50087: 2010, 실량표시상품의 실량검사.
4. Boyer, D. E. and Nazemetz, J.(1985), “Introducing Statistical Selective Assembly - A Means of Producing High Precision Assemblies from Low Precision Components,” Annual International Industrial Engineering Conference Proceedings, 562-570.
5. Burr, I. W.(1958), “Some Theoretical and Practical Aspects of Tolerances for Mating Parts,” Industrial Quality Control, 15(3), 18-22.
6. Carlsson, O.(1984), “Determining the Most Profitable Process Level for a Process Under Different Sales Conditions,” Journal of Quality Technology, 16, 44-49.
7. Carlyle, W. M., Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(2000), “Optimization Problems and Methods in Quality Control and Improvement,” Journal of Quality Technology, 32, 1-17.
8. Chandra, M. J.(2001), Statistical Quality Control, CRC Press, Boca Raton(USA).
9. Del Castillo E., Pan, R. and Colosimo, B. M.(2003), “A Unifying View of Some Process Adjustment Methods,” Journal of Quality Technology, 19, 286-293.
10. Drezner, Z. and Wesolowsky, G. O.(1989), “Optimal Control of a Linear Trend Process with Quadratic Loss,” IIE Transactions, 21, 66-71.
11. Gibra, I. N.(1974), “Optimal Production Run of a Process Subject to Systematic Trends,” International Journal of Production Research, 12, 511-517.

12. Golhar, D. Y.(1987), "Determination of the Best Means Contents for a Canning Problem," *Journal of Quality Technology*, 19, 82-84.
13. Golhar, D. Y. and Pollock, S. M.(1988), "Determination of the Best mean and the Upper Limit for a Canning Problem," *Journal of Quality Technology*, 20, 188-192.
14. Grubbs, F. E.(1954), "An Optimum Procedure for Setting Machines or Adjusting Processes," *Industrial Quality Control*, 11(3), 1-4 (reprinted in *Journal of Quality Technology*, 15, 186-189, 1983).
15. Hunter, W. C. and Kartha, C. P.(1977), "Determining the Most Profitable Target Value for a Production Process," *Journal of Quality Technology*, 9, 176-181.
16. International Organization of Legal Metrology, (2004), OIML R87 Quantity of Product in Prepackages, OIML.
17. Kannan, S. M. and Jayabalan, V.(2001), "A New Grouping Method to Minimize Surplus Parts in Selective Assembly for Complex Assemblies," *International Journal of Production Research*, 39, 1851-1863.
18. Kwon, H. M., Kim, K. and Chandra, M. J.(1999), "An Economic Selective Assembly Procedure for Two Mating Components with Equal Variance," *Naval Research Logistics*, 1999, 46, 809-821.
19. Li, L. and Owen, D. B.(1979), "Two-Sided Screening Procedures in the Bivariate Case," *Technometrics*, 21, 79-85.
20. Mandel B. J.(1969), "The Regression Control Chart," *Journal of Quality Technology*, 1, 1-9.
21. Mansoor, E.(1961), "Selective Assembly-its Analysis and Applications," *International Journal of Production Research*, 1, 13-24.
22. Matsuura, S. and Shinozaki, N.(2007), "Optimal Binning Strategies under Squared Error Loss in Selective Assembly with Measurement Error," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 36, 2863-2876.
23. Mease, D., Nair, V. N. and Sudjianto, A.(2004), "Selective Assembly in Manufacturing: Statistical Issues and Optimal Binning Strategies," *Technometrics*, 46, 165-175.
24. Owen, D. B., McIntire, D. and Seymour, E.(1975), "Tables Using One or Two Screening Variables to Increase Acceptable Product under One-Sided Specifications," *Journal of Quality Technology*, 7, 127-138.
25. Owen, D. B. and Su, Y. M.(1977), "Screening Based on Normal Variables," *Technometrics*, 19, 65-68.

26. Pugh, G. A.(1992), "Selective Assembly with Components of Dissimilar Variance," *Computers and Industrial Engineering*, 23, 487-491.
27. Rabinovich, L. A. and Kesoyan, A. G.(1980), "Investigating the Rational Sorting Accuracy for Selective Assembly of Precision Units," *Russian Engineering Journal*, 60(10), 50-53.
28. Tahera, K., Chan, W. M. and Ibrahim, R. N.(2008), "Joint Determination of Process Mean and Production Run: A Review," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 39, 388-400.
29. Tang, K. and Tang, J.(1994), "Design of Screening Procedures: A Review," *Journal of Quality Technology*, 26, 209-226.
30. Trietsch, D.(1998), "The Harmonic Rule for Process Setup Adjustment with Quadratic Loss," *Journal of Quality Technology*, 30, 75-84.

찾아보기

ㄱ

- 개별요건 2, 27
- 고전적 최적화 방법 5
- 공구 교체주기 38

ㄴ

- 대용특성 47
- 등간격 분할방식 54
- 등면적 분할방식 58

ㄷ

- 라그랑주 승수법 44

ㄹ

- 망대특성 48
- 망소특성 50
- 미조립 발생 예방 58
- 미조립 부품 비율 57

ㅁ

- 베타분포 10
- 부적합품 12
- 부적합품률 55
- 비선형/적분 방정식의 수치해법 5

ㅂ

- 생산자 위험 27, 48
- 생산주기 설정 31
- 생산주기와 공정평균의 설정 34

- 선별검사의 기준치 48
- 선택조립 54
- 소비자 위험 48
- 수익이 내용물 용량에 비례할 경우 18
- 순서 매칭방식 62
- 순서통계량 62
- 시료보정인자 29
- 실량표시량 26
- 실량표시상품 사례 2

ㅇ

- 양쪽 규격 5, 34, 51
- 용기 충전공정 13
- 이중 등간격 방식 54
- 이중 등면적 분할방식 59
- 이항분포 27

ㅅ

- 재가공하는 경우 16, 22
- 전수검사 13, 48
- 정규곡선 56
- 정규분포 8
- 정밀도 54
- 조화 조정 규칙 40
- 주 품질특성 48

ㅆ

- 최대 허용오차 27
- 최선 매칭방식 62

최적 공정평균 5, 13
 최적 공정평균 및 규격상한 설정 22
 최적 생산주기 32
 추세 공정 31
 측정 40
 측정오차 40, 63

E

통계적 매칭방식 62
 통계적 품질관리 4

II

편의 4
 평균요건 2, 26
 표준정규분포 14
 표준편차 57
 품질 수준의 선정 4

ㅎ

한쪽 규격 31, 48
 할인 판매하는 경우 13
 허용 부족량 29
 허용구간 5
 허용차 53
 확장 조화 규칙 47
 회귀관리도 38

기타

canning problem 12
 Grubbs 40
 LSQ 26
 OIML R87 29
 OIML 검사계획 29
 SCF 29
 SEL(Sample Error Limit) 28
 target value problem 12